

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RONALD WEGNER NETO

**PROPRIEDADES DE ESTIMADORES ECONOMÉTRICOS PARA A
FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO
MONTE-CARLO PARA AS FORMAS PRIMAL E DUAL.**

CURITIBA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RONALD WEGNER NETO

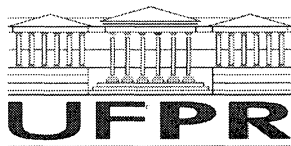
**PROPRIEDADES DE ESTIMADORES ECONOMÉTRICOS PARA A
FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO
MONTE-CARLO PARA AS FORMAS PRIMAL E DUAL.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Desenvolvimento Econômico.

Orientador: Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt.

CURITIBA


2017



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RONALD WEGNER NETO** intitulada: **PROPRIEDADES DE ESTIMADORES ECONÔMETRICOS PARA A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO CES: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO MONTE-CARLO PARA AS FORMAS PRIMAL E DUAL.**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 13 de Abril de 2017.


MAURÍCIO VAZ LOBO-BITTENCOURT
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


ALEXANDRE ALVES PORSSE
Avaliador Interno (UFPR)


FABRICIO TOURRUCÓ
Avaliador Externo (UFRGS)


ARMANDO VAZ SAMPAIO
Avaliador Interno (UFPR)

RESUMO

Do encontro entre a teoria microeconômica e a econometria surgem dois momentos complementares: o primeiro é a adaptação do modelo teórico ao meio econométrico; o segundo momento concerne da adequação dos resultados econométricos ao modelo teórico. O leitmotiv deste trabalho é utilizar a função de produção CES em sua formulação primal e dual, obtendo-se um ponto ótimo teórico através do problema da maximização de lucro. Uma vez com este modelo, serão construídas cinco regressões econométricas, tendo em mente uma simulação de Monte-Carlo para fornecer algumas propriedades sobre os estimadores que serão utilizados: OLS (aproximação de Kmenta) e NLLS (Levenberg-Marquardt). Finalmente, o objetivo é entender como os erros estocásticos na demanda de insumos influenciam as propriedades dos estimadores na formulação primal, indo de encontro ao dual que não leva esses erros. Os principais achados corroboram a literatura sobre inconsistência com erros estocásticos no consumo de insumos no modelo primal, assim como com a aproximação de Kmenta, ainda que na forma dual. Mesmo quando o método NLLS de Levenberg-Marquardt mostra alguma consistência com pequenas variáveis e distúrbios ainda menores, este estimador regressando grandes números atinge ainda os verdadeiros parâmetros em alguns casos, embora a função de densidade dos dados exiba dois picos distintos, levando-nos a concluir que os verdadeiros parâmetros não foram alcançados, mas alguns valores de sua vizinhança que são frequentemente obtidos, ao invés do valor verdadeiro.

Palavras-chave: *Estimativa primal-dual, simulação Monte-Carlo, CES.*

ABSTRACT

The association between microeconomic theory and econometrics results in two subsequent overlapping moments. First, a theoretical model that must be adapted to econometrical environments; and secondly, the econometrical results that satisfy the theoretical model. This work leitmotiv is to use the CES production function in its primal and dual formulation, resulting in a theoretical optimum point through the profit maximization problem. Whilst defining the model, this study builds five econometric regressions based on a Monte-Carlo simulation to provide some properties about the estimators that will be used: OLS (Kmenta approximation) and NLLS (Levenberg-Marquardt). Our purpose is to understand how stochastic errors in input demand still influence the properties of the estimators in primal formulation even though the dual lack these errors. The main findings corroborate the literature about inconsistency with stochastic errors in input consumption and Kmenta's approximation, even in dual form. Our conclusions are buttressed by the finding that even when the Levenberg-Marquardt NLLS method shows some consistency with small valued variables and minor disturbances, it still could achieve the true parameter in some cases, even when regressing great numbers. Even though the density function, in some cases of the data, exhibits two peaks, leading us to understand that not the true parameters were achieved, but that some neighbourhood values are frequently achieved instead.

Keywords: *Primal-dual estimation, Monte-Carlo simulation, CES.*

SUMÁRIO

	Sumário	v
	Introdução	1
1	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	5
1.1	CONVEXIDADE	5
1.2	O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	11
1.3	CONCEITOS ESTATÍSTICOS	15
2	TEORIA DA PRODUÇÃO E DUALIDADE	18
2.1	FUNÇÃO DE PRODUÇÃO	18
2.1.1	Elasticidade de Substituição	20
2.2	FORMAS FUNCIONAIS	21
2.2.1	Propriedades da forma funcional CES-ACMS	22
2.2.2	Expansão da função CES	24
2.3	DUALIDADE	25
2.3.1	Teorema do Envelope e dualidade de Hotelling e Shephard	25
2.3.2	Dualidade e Envoltória Convexa	27
2.3.3	Solução dual	27
3	SIMULAÇÃO E ESTIMAÇÃO	30
3.1	DESENHO DA SIMULAÇÃO	31
3.1.1	Geração das variáveis	31
3.2	ESPECIFICAÇÃO DOS MODELOS DE ESTIMAÇÃO	33
3.2.1	Modelos por expansão de Taylor truncada	33
3.2.2	Modelos NLLS por Levenberg-Marquardt	37
3.2.3	Especificação estocástica dos modelos	38
4	DISCUSSÃO DE RESULTADOS	41
	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE – RESULTADOS NUMÉRICOS	51

INTRODUÇÃO

O encontro entre a teoria econômica pura com a econometria aplicada gera à primeira vista certo descompasso. Na teoria econômica temos um arcabouço majoritariamente ergódico e determinístico. Por outro lado na econometria trabalhamos com as informações disponíveis e erros estocásticos que representam as variáveis não observáveis. Começamos desta forma a unir um universo da informação completa com outro da informação possível. O escopo inicial deste trabalho é fazer, justamente, uma ponte entre a teoria da produção com a econometria aplicada, mesmo que esta aplicação seja fundada em simulações, buscando entender parte do alcance desta combinação de conhecimentos para a análise econômica. Os primeiros contatos do economista com a teoria da produção se pautam sobretudo na ideia de escolha ótima de alguma variável de interesse, seja o nível de produção, custo, lucro, demandas e ofertas; já com a econometria este contato se pauta no estimador OLS e suas propriedades. Neste trabalho não é muito diferente. A função de produção é um conceito fundamental, com a qual serão relacionados duas variáveis de interesse do produtor: nível de produção y e lucro Π . Do ponto de vista econométrico serão analisados o viés, assim como o viés de acordo com o aumento do número de amostras disponíveis, e a eficiência relativa entre estimadores OLS e NLLS tendo em vista a construção de 5 modelos de regressão. Sabendo por onde começamos, ao encontro entre teoria e prática, é mister que sejam delineadas as principais características desta aproximação de conteúdos.

Das funções de produção e suas características surgem as formas funcionais. Diversas são as formas e características das formas funcionais, algumas prontamente lineares nos parâmetros como a translog, outras facilmente linearizáveis, como a Cobb-Douglas proposta pelos autores que dão nome à função (COBB; DOUGLAS, 1928) e outras não linearizáveis como a função de elasticidade constante (CES) de Arrow-Chenery-Minhas-Solow (ARROW et al., 1961), função de elasticidade variável (VES) de Revankar (1971) e as variações, tanto da CES (UZAWA, 1962; MCFADDEN, 1963) como da VES (ANTONY, 2010; GRANDVILLE, 1989). Das formas funcionais, uma das características mais interessantes para a análise econômica é a elasticidade de substituição. Muitas vezes a elasticidade de substituição é definida para um espaço de insumos em \mathbb{R}^2 , vindo da fórmula proposta por Hicks (1963). Esta medida nos permite perceber a capacidade da substituíbilidade entre dois insumos utilizados na produção. Porém quando adentrarmos na aplicação deste conceito com o auxílio da econometria, deve-se atentar para a fórmula funcional, as possibilidades de tratamento e as medidas simplificadoras. É comum que se utilize a função Cobb-Douglas para regredir econometricamente uma base de dados, mesmo que se utilize de uma hipótese quase heróica de uma elasticidade de substituição igual à unidade. Ao se relaxar a exigência da elasticidade de substituição apenas igual à unidade,

pode-se utilizar então da função CES-ACMS como forma funcional, adicionando-se um fator de escala e um termo neutro de Hicks.

Partindo de uma análise microeconômica, temos que um dos pressupostos da modelagem levada a cabo é de que a firma é tomadora de preço, ou seja: a firma não detém poder de mercado para comprar os insumos consumidos nem para vender sua produção. Ainda sobre os pressupostos também se trabalhará com a noção de produtor otimizador; este trabalho se focará sob o problema da maximização de lucro em conjunto com o nível de produção. Para tanto certas propriedades da forma funcional da função de produção utilizada devem ser verificadas. Uma vez garantidas certas regularidades da função de produção, também tendo em vista que a função lucro para uma firma tomadora de preço é um hiperplano, poderemos assim, com o auxílio dos teoremas do Capítulo 1, afirmar que é possível alcançar um ponto de máximo global para o problema da maximização do lucro. Porém mais que uma simples busca pelo lucro máximo, a relação entre funções de produção e funções de lucro se dá também em outro nível: o da dualidade.

A ideia da dualidade remete a muitas abordagens, mas com um objetivo em comum: poder descrever um conjunto de possibilidades de produção definida por uma função de produção, que chamaremos de função primal, por uma outra função que chamaremos de função dual, tendo em vista que esta função dual será capaz de recuperar os mesmos parâmetros que originaram a função primal. Alguns autores afirmam que a dualidade se baseia no teorema de Fenchel (DIEWERT, 1982), outros que se apoiam na dualidade do lagrangeano (SHUMWAY, 1995), mas principalmente há os que defendem que a dualidade na teoria microeconômica se pauta nos teoremas do envelope (DIEWERT, 1982; PARIS; CAPUTO, 1995) e no teorema de Minkowsky (DIEWERT, 1974; DIEWERT, 1982; PARIS; CAPUTO, 1995; POPE, 1982), ou teorema de Hahn-Banach na forma geométrica (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993). Destas duas últimas formas de se analisar o problema da dualidade é que este trabalho se direcionará, principalmente desta última forma de se ver a questão. Outrossim, podemos descrever o conjunto de possibilidades de produção da CES em questão através da função de lucro como nossa forma dual. Destarte, existe uma troca de variáveis que permite recuperar os mesmos parâmetros funcionais (DEATON; MUELLBAUER, 1980; PARIS; CAPUTO, 1995).

Uma vez que teoricamente é garantida a dualidade entre a função de produção e a função de lucro, quais problemas irrompem quando adentrarmos na estimação econométrica da dualidade? Alguns fatores tornam a dualidade incapaz de ser alcançada. Um fator é a questão do risco (POPE, 1980; JUST; POPE, 1978), uma vez que muitas vezes a produção de uma firma, de um setor da economia ocorre antes da realização dos preços, dificultando um comportamento exclusivamente maximizador condizente com a tecnologia em questão. Um outro problema de ordem teórica é a escolha de uma forma funcional auto-dual (THOMPSON; LANGWORTHY, 1989; LUSK et al., 2002; BURGESS, 1975), de tal forma que tanto a forma primal e a dual sejam de uma mesma família de funções,

caso contrário a dualidade pode não ser obtida; uma vez que utilizamos da CES não teremos problemas com a auto-dualidade.

Todavia, um dos problemas de ordem prática e teórica que será trabalhado nesta dissertação é o de erros nas medidas dos insumos consumidos, uma vez que tais erros não-observáveis podem ter inúmeras causas e consequências. Primeiramente uma firma pode ter na sua função objetivo de maximização inúmeras características não observáveis pelo econometrista, podendo levar assim a uma alteração da quantidade consumida em relação ao ponto que seria considerado ótimo, parecendo, assim, aleatório (LUSK et al., 2002). Outra fonte de erro poderia ser simplesmente decorrente de um banco de dados mal formado. De qualquer forma distúrbios nas variáveis independentes acabam gerando estimativas vulneráveis (LUSK et al., 2002; BROWN; WALKER, 1995; BERNDT, 1976; BITTENCOURT; SAMPAIO, 2011).

Semelhante ao que foi feito por Bittencourt e Sampaio (2011) com a Cobb-Douglas, este trabalho se pautará na comparação da dualidade e na recuperação dos parâmetros de uma CES quando há erros nas medidas das quantidades consumidas, usando-se de simulações Monte-Carlo para analisar o viés de acordo com que uma amostra cresce. Uma vez que se mudou a forma funcional, também serão diferentes as estratégias de estimação e simulação. Na busca de compreender a qualidade das estimativas dos parâmetros sob a óptica da dualidade serão trabalhados cinco modelos: dois primais e três duais. Uma vez que a CES é não-linear, será construído um modelo dual que pode ser regredido por um OLS através de uma expansão de Taylor truncada como em Kmenta (1967). A construção deste modelo na forma dual só foi exequível ao se substituir as variáveis primais (quantidades consumidas) pelas duais (preço do produto e dos insumos consumidos), ao passo que o nível de produção se mostrou muito mais adaptável do que o nível de lucro. Os outros três modelos se pautam em um estimador NLLS, utilizando-se da metodologia de Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963).

Muitos outros trabalhos se utilizaram de simulações Monte-Carlo para analisar a capacidade de recuperação de parâmetros de uma CES na forma primal. Partindo de uma aproximação como em Kmenta (1967) comparando com um estimador NLLS através de simulações Monte-Carlo, Kumar e Gapinski (1974) mostraram que na forma primal (utilizando-se apenas o espaço de quantidades) estimada por NLLS apenas o parâmetro ρ não obteve estimativas consistentes. Utilizando um sistema de busca, Corbo (1977) adaptou um NLLS exequível por OLS; todavia esta forma de trabalhar exige inúmeras repetições sem um critério muito específico de parada ou de procura, baseado majoritariamente na varredura de intervalos numéricos cada vez menores. Neste trabalho também não se obteve estimativas consistentes para os valores de ρ . De forma análoga ao que foi feito em Kumar e Gapinski (1974), Corbo (1977), através de simulações Monte-Carlo incorporando novas formas de se regredir uma CES, Thursby e Lovell (1978), Thursby (1980) chegam aos mesmos resultados inconsistentes na estimação de ρ .

Desta forma, a principal contribuição deste trabalho se pauta em responder a questão: seriam as estimativas dos parâmetros da CES através de uma análise dual, também enviesadas? Para tentar responder a esta questão serão feitas simulações Monte-Carlo para 24 conjuntos de parâmetros em 5 modelos. A análise de pautará principalmente na análise do viés e eficiência de acordo com que a amostra cresce. Serão utilizados erros estocásticos nas formas aditivas e multiplicativas de erros. Assim, tanto quanto se busca analisar as formas duais da CES, também se reproduz em parte outros trabalhos que se utilizaram apenas da forma primal.

1 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

O problema econômico que tratamos ao longo deste trabalho depende em grande parte de uma fundamentação matemática. Este capítulo é dedicado aos principais resultados desta fundamentação matemática de modo a facilitar a leitura e o entendimento do trabalho.

1.1 CONVEXIDADE

Esta seção trata de alguns conceitos de convexidade em \mathbb{R}^ℓ . A principal referência desta seção é Hiriart-Urruty e Lemaréchal (1993).

Iniciamos com a definição de conjunto convexo.

Definição 1.1 *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ é dito convexo quando todos os pontos de um segmento de reta determinado por dois pontos quaisquer do conjunto estão contidos em C , ou seja,*

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C \quad \Rightarrow \quad t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1 \in C, \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

A Figura 1 ilustra dois conjuntos, um convexo e outro não convexo. Note que no segundo conjunto nem todo segmento que liga dois pontos do conjunto está inteiramente contido no conjunto.

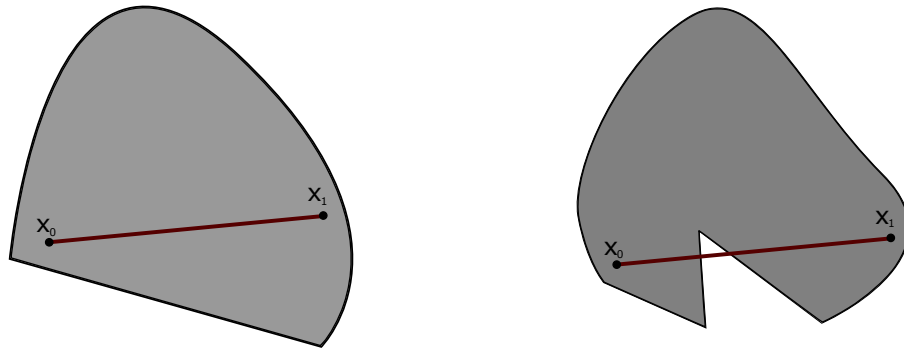


Figura 1 – Conjunto convexo (esquerda) e um conjunto não convexo (direita).

A seguir, temos a definição de função côncava.

Definição 1.2 *Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava quando, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$, vale a desigualdade*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

Geometricamente, uma função f é côncava quando qualquer arco no seu gráfico não está abaixo do segmento que liga as extremidades do arco. Por outro lado, uma função é estritamente côncava quando o interior de qualquer arco no seu gráfico está sempre acima do segmento que liga as suas extremidades, como definido a seguir.

Definição 1.3 *Considere um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente côncava quando, para todo $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in (0, 1)$:*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) > tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

A partir das definições acima, temos a definição de função convexa e estritamente convexa. Uma função f é (estritamente) convexa quando $-f$ é (estritamente) côncava. Escrito explicitamente temos:

Definição 1.4 *Considere um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando, para todo, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$, vale a desigualdade*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \leq tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

Analogamente, temos a definição de função estritamente convexa.

Definição 1.5 *Considere um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa quando, para todo $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in (0, 1)$:*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) < tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

As definições de hipografo e epigrafo, que veremos a seguir, nos auxiliam em outra forma de verificar que uma função é côncava/convexa. O hipografo de uma função f é descrito pelo conjunto de pontos (\mathbf{x}, y) que estejam “abaixo” do gráfico de f .

Definição 1.6 *O hipografo de uma função $f : C \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos (\mathbf{x}, y) tais que $y \leq f(\mathbf{x})$ ou seja:*

$$\text{hip}(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid y \leq f(\mathbf{x})\}.$$

Analogamente, o epigrafo de uma função f é descrito pelo conjunto de pontos (\mathbf{x}, y) que estão “acima” do gráfico de f , como definido a seguir.

Definição 1.7 *O epigrafo de uma função $f : C \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos (\mathbf{x}, y) tais que $y \geq f(\mathbf{x})$ ou seja:*

$$\text{epi}(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid y \geq f(\mathbf{x})\}.$$

O próximo resultado relaciona uma função côncava com a convexidade de seu hipografo.

Lema 1.8 *Se f é côncava, então $\text{epi}(f)$ é convexo.*

Demonstração. Segue de Hiriart-Urruty e Lemaréchal (1993, Prop. 1.1.6, Cap.IV). \square

O estudo da convexidade é fundamental para a evolução do trabalho, uma vez que as funções de produção que veremos no Capítulo 2 exibem muitas das propriedades estudadas neste capítulo. A quase-concavidade e quase-convexidade são dois conceitos importantes, que somados ao grau de homogeneidade de uma função nos possibilitam estudar dois teoremas que se apresentam como importantes ferramentas.

Definição 1.9 *Considere um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dita quase-côncava quando, para todo, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$, vale a desigualdade,*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq \min\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\}.$$

De forma análoga a quase-convexidade é definida como:

Definição 1.10 *Considere um conjunto $C \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dita quase-convexa quando, para todo $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$, vale a desigualdade,*

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \leq \max\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\}.$$

O próximo resultado garante que convexidade implica quase-convexidade.

Lema 1.11 *Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo. Se $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava, então f é quase-côncava.*

Demonstração. Pela Definição 1.2, temos que para todo, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) &\geq tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1) \\ &\geq t \min\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\} + (1-t) \min\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\} \\ &= \min\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

A seguir temos a definição de função monótona crescente.

Definição 1.12 *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita monótona crescente quando:*

$$x_0 \leq x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) \leq f(x_1).$$

Se as desigualdades forem estritas, a função é dita estritamente crescente.

A seguir temos a definição de função homogênea.

Definição 1.13 Uma função $f : C \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau i quando, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in C$,

$$f(t\mathbf{x}) = t^i f(\mathbf{x}).$$

O próximo resultado estabelece condições suficientes para que uma função seja quase-côncava.

Teorema 1.14 Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo e uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Se $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ é uma função côncava para alguma transformação monotonicamente crescente $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então f é quase-côncava.

Demonstração. Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monotonicamente crescente tal que $h = g \circ f$ é côncava. Pelo Lema 1.11, h é quase-côncava e portanto, pela Definição 1.9, para todo, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in (0, 1)$, vale a desigualdade,

$$h(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq \min\{h(\mathbf{x}_0), h(\mathbf{x}_1)\}.$$

Como g é crescente, existe a inversa g^{-1} que também é estritamente crescente. Aplicando a inversa de g na desigualdade acima, segue que:

$$g^{-1}(h(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1)) \geq g^{-1}(\min\{h(\mathbf{x}_0), h(\mathbf{x}_1)\}).$$

Usando os fatos que $g^{-1}(h(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$ e que g^{-1} é estritamente crescente, segue que,

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) &\geq g^{-1}(\min\{h(\mathbf{x}_0), h(\mathbf{x}_1)\}) \\ &= \min\{g^{-1}(h(\mathbf{x}_0)), g^{-1}(h(\mathbf{x}_1))\} \\ &= \min\{f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)\} \end{aligned}$$

o que, pela Definição 1.9, conclui a demonstração. \square

O próximo resultado estabelece uma condição suficiente para que se tenha uma função côncava.

Teorema 1.15 Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo e uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}_{++}$. Se f é quase-côncava e tem grau de homogeneidade 1, então f é côncava.

Demonstração. Como f é homogênea de grau 1 e $f(\mathbf{x}) \neq 0$, para todo $\mathbf{x} \in C$, tem-se que,

$$f\left(\frac{\mathbf{x}}{f(\mathbf{x})}\right) = \frac{1}{f(\mathbf{x})}f(\mathbf{x}) = 1. \quad (1.1)$$

E ainda, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $r \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{rf(\mathbf{x}_0) + (1-r)f(\mathbf{x}_1)}f(r\mathbf{x}_0 + (1-r)\mathbf{x}_1) = f\left(\frac{r\mathbf{x}_0 + (1-r)\mathbf{x}_1}{rf(\mathbf{x}_0) + (1-r)f(\mathbf{x}_1)}\right).$$

Como o contradomínio de f é \mathbb{R}_{++} , tem-se que

$$s = \frac{rf(\mathbf{x}_0)}{rf(\mathbf{x}_0) + (1-r)f(\mathbf{x}_1)} \in [0, 1].$$

Usando a expressão de s no lado direito da igualdade acima, o fato que f é quase-côncava e (1.1), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{rf(\mathbf{x}_0) + (1-r)f(\mathbf{x}_1)} f(r\mathbf{x}_0 + (1-r)\mathbf{x}_1) &= f\left(s\frac{\mathbf{x}_0}{f(\mathbf{x}_0)} + (1-s)\frac{\mathbf{x}_1}{f(\mathbf{x}_1)}\right) \\ &\geq \min\left\{f\left(\frac{\mathbf{x}_0}{f(\mathbf{x}_0)}\right), f\left(\frac{\mathbf{x}_1}{f(\mathbf{x}_1)}\right)\right\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $r \in [0, 1]$,

$$f(r\mathbf{x}_0 + (1-r)\mathbf{x}_1) \geq rf(\mathbf{x}_0) + (1-r)f(\mathbf{x}_1),$$

o que completa a demonstração. \square

O próximo teorema garante que a composição de uma função côncava crescente com uma função côncava resulta numa função côncava.

Teorema 1.16 *Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo e uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ côncava. Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava crescente. Então a função $h : C \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, é uma função côncava.*

Demonstração. Como f é côncava, temos, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$,

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

Usando o fato que g é crescente e côncava, temos que

$$\begin{aligned} g(f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1)) &\geq g(tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1)) \\ &\geq tg(f(\mathbf{x}_0)) + (1-t)g(f(\mathbf{x}_1)). \end{aligned}$$

Usando o fato que $h = g \circ f$ na desigualdade acima, temos, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$ e $t \in [0, 1]$,

$$h(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq th(\mathbf{x}_0) + (1-t)h(\mathbf{x}_1),$$

o que completa a demonstração. \square

A envoltória convexa de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^\ell$, denotada por $\text{conv}(S)$, é o menor conjunto convexo que o contém, conforme definido a seguir.

Definição 1.17 *A envoltória convexa de um conjunto S , denotada por $\text{conv}(S)$, é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contenham S .*

A seguir definimos hiperplano e semi-espço, conforme Hiriart-Urruty e Lemaréchal (1993).

Definição 1.18 *Dado o vetor não nulo $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^\ell$ e o escalar $r \in \mathbb{R}$, o hiperplano associado a (\mathbf{s}, r) e denotado por $P_{\mathbf{s}, r}$ é o conjunto definido por*

$$P_{\mathbf{s}, r} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{s}^T \mathbf{x} = r\}.$$

A (\mathbf{s}, r) associam-se dois semi-espços definidos por

$$H_{\mathbf{s}, r}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{s}^T \mathbf{x} \geq r\} \quad e \quad H_{\mathbf{s}, r}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell : \mathbf{s}^T \mathbf{x} \leq r\}.$$

Supondo dois conjuntos convexos disjuntos (cuja interseção é um conjunto vazio) pode-se mostrar que existe um hiperplano que separa estes dois conjuntos. O teorema que garante tal afirmação é conhecido como o teorema de Hahn-Banach (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993) na forma geométrica.

Teorema 1.19 *Considere $C \subset \mathbb{R}^\ell$ e $\mathbf{x} \notin C$. Então, existe $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^\ell$ tal que:*

$$\mathbf{s}^T \mathbf{x} > \sup_{\mathbf{y} \in C} \mathbf{s}^T \mathbf{y}.$$

Demonstração. Segue de Hiriart-Urruty e Lemaréchal (1993, Teorema 4.1.1, p. 121-122).

□

A definição de uma função suporte de um conjunto C surge naturalmente deste teorema, como:

Definição 1.20 *supfunc Uma função suporte $\mu_C(\mathbf{s})$ de um conjunto C é dada por:*

$$\mu_C(\mathbf{s}) = \sup \{\mathbf{s}^T \mathbf{y} : \mathbf{y} \in C\}.$$

De tal forma que podemos descrever todos os elementos de um conjunto convexo C supondo um $\mathbf{z} \in C$ através da definição acima como:

$$C = \{\mathbf{s}^T \mathbf{z} \leq \mu_C(\mathbf{s}) : \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^\ell\}. \quad (1.2)$$

O teorema do envelope e os teoremas relacionados com a envoltória convexa serão bastante importantes para o entendimento de dualidade, uma vez que é de entendimento que as primeiras condições de dualidade na teoria da produção utilizaram-se do teorema do envelope. Posteriormente os resultados de dualidade decorreram da envoltória convexa e teoremas que permeiam este tema.

Primeiramente o teorema do envelope para problemas de otimização sem restrição é o seguinte:

Teorema 1.21 *Seja $f : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Para cada valor do parâmetro a considere o problema:*

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, a) \quad (1.3)$$

com solução $\bar{\mathbf{x}}(a)$. Se $\bar{\mathbf{x}}(a)$ é uma função de a de classe C^1 , então:

$$\frac{d}{da} f(\bar{\mathbf{x}}(a), a) = \frac{\partial}{\partial a} f(\bar{\mathbf{x}}(a), a). \quad (1.4)$$

Demonstração. Segue de BLUME (1994, Teorema 19.4, p. 453). \square

O lado esquerdo da igualdade de (1.4) é a derivada em relação à sua única variável da função f aplicada no ponto $(\bar{\mathbf{x}}(a), a)$. Por outro lado, o membro da direita da igualdade refere-se à derivada parcial em relação à segunda variável da função f . O teorema nos diz que estas derivadas coincidem, quando calculadas, respectivamente, nos pontos a e $(\bar{\mathbf{x}}(a), a)$.

A seguir vemos o resultado análogo para problemas restritos.

Teorema 1.22 *Considere $f(\mathbf{x}, a)$ e $g_i(\mathbf{x}, a)$, para todo $i = 1, \dots, k$, funções de classe C^1 . Seja $\bar{\mathbf{x}}(a)$ a solução do problema:*

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, a) \\ &\text{sujeito a } g_i(\mathbf{x}, a) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se $\bar{\mathbf{x}}(a)$ e os multiplicadores de Lagrange $\lambda_i(a)$ são funções de classe C^1 em relação a a , então

$$\frac{d}{da} f(\bar{\mathbf{x}}(a), a) = \frac{\partial L}{\partial a} f(\bar{\mathbf{x}}(a), \boldsymbol{\lambda}(a), a). \quad (1.6)$$

Demonstração. Segue de BLUME (1994, Teorema 19.5, p. 456). \square

Estes dois teoremas são utilizados como referência aos resultados dos teoremas de Hotelling (1932), Hotelling (1935) e Shephard (1953).

1.2 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Esta seção, cuja principal referência é Ribeiro e Karas (2013), trata de conceitos de otimização contínua. O problema de otimização que nos defrontamos majoritariamente, ao longo deste trabalho, são de maximização de uma função restrita a um conjunto definido por desigualdades, da forma:

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \\ &\mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções continuamente diferenciáveis. Denotando $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } \mathbf{x} \geq 0\}$ o conjunto viável do problema acima, este pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{maximizar}} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1.8)$$

Denotamos a bola aberta centrada em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^\ell$ e raio $r > 0$ por $B(\bar{\mathbf{x}}, r)$, ou seja,

$$B(\bar{\mathbf{x}}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell \mid \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < r\}.$$

A seguir definimos solução local e global do problema (1.8).

Definição 1.23 Dizemos que $\bar{\mathbf{x}}$ é maximizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap \Omega$. Se $f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, o ponto $\bar{\mathbf{x}}$ é dito maximizador global de f em Ω .

O teorema a seguir garante que se Ω é convexo e f é côncava, então todo maximizador local é global. A demonstração é baseada nas ideias de Ribeiro e Karas (2013, Teorema 3.12).

Teorema 1.24 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo e $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava. Se $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ é maximizador local de f , então $\bar{\mathbf{x}}$ é maximizador global de f .

Demonstração. Por hipótese $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ é maximizador local de f , logo existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in B(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap \Omega$, vale a desigualdade

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Vamos provar que a desigualdade acima também é válida para todo ponto em Ω mas fora da bola $B(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$. Considere um ponto arbitrário $\mathbf{x}_2 \in \Omega$ com $\mathbf{x}_2 \notin B(\bar{\mathbf{x}}, \delta)$. Tome $t > 0$ tal que $t\|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$. Defina $\mathbf{x}_1 = (1 - t)\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{x}_2$. Note que $\mathbf{x}_1 \in B(\bar{\mathbf{x}}, \delta) \cap \Omega$, visto que Ω é convexo e

$$\|\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}\| = t\|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta.$$

Por (1.9) e o fato que f é côncava, segue que

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}_1) \geq (1 - t)f(\bar{\mathbf{x}}) + tf(\mathbf{x}_2).$$

Como $t > 0$, a desigualdade acima implica

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}_2),$$

completando a demonstração. □

O próximo lema é uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem para o caso irrestrito, ou seja, em que $\Omega = \mathbb{R}^\ell$. Esta condição é a caracterização de um ponto estacionário (ponto crítico), podendo ser maximizador local, minimizador local, ou ponto de sela.

Lema 1.25 *Seja $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é maximizador local de f , então $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.*

Demonstração. (RIBEIRO; KARAS, 2013, Teorema 2.9). □

Para que possamos discutir condições de otimalidade de segunda ordem, é necessário o conceito de matriz (semi) definida positiva e negativa.

Definição 1.26 *Seja $M \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ uma matriz simétrica. Dizemos que M é*

- (i) *definida positiva, quando $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$.*
- (ii) *semidefinida positiva, quando $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$.*
- (iii) *definida negativa, quando $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} < 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$.*
- (iv) *semidefinida negativa, quando $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$.*
- (v) *indefinida, quando existem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\ell$ e $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^\ell$ tais que $\mathbf{x}_0^T M \mathbf{x}_0 < 0 < \mathbf{x}_1^T M \mathbf{x}_1$.*

O próximo teorema refere-se à condição necessária de otimalidade de segunda ordem.

Teorema 1.27 *Seja $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ duplamente continuamente diferenciável no ponto $\bar{\mathbf{x}}$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um maximizador local de f , então temos para todo vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$:*

$$\mathbf{a}^T \nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a} \leq 0,$$

ou seja, a matriz Hessiana de f em $\bar{\mathbf{x}}$ é semidefinida negativa.

Demonstração. Análoga a Ribeiro e Karas (2013, Teorema 2.12). □

Analogamente tem-se que se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local de f , este ponto é estacionário com Hessiana semidefinida positiva. A seguir temos a condição suficiente de otimalidade.

Teorema 1.28 *Seja $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ duplamente continuamente diferenciável no ponto $\bar{\mathbf{x}}$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto estacionário de f e a matriz Hessiana de f em $\bar{\mathbf{x}}$ é definida negativa, então $\bar{\mathbf{x}}$ é maximizador local estrito de f .*

Demonstração. Análoga a Ribeiro e Karas (2013, Teorema 2.14). □

Da mesma forma, se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto crítico e a Hessiana de f em $\bar{\mathbf{x}}$ é definida positiva, então $\bar{\mathbf{x}}$ é minimizador local estrito. Porém o que ocorre quando a matriz Hessiana for indefinida? A resposta deste pergunta encontra-se no próximo teorema.

Teorema 1.29 *Seja $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ é duplamente continuamente diferenciável no ponto $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^\ell$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto estacionário de f e $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}})$ é indefinida, então $\bar{\mathbf{x}}$ é ponto de sela.*

Demonstração. (RIBEIRO; KARAS, 2013, Teorema 2.16). \square

O lema a seguir estabelece uma importante propriedade das funções côncavas diferenciáveis.

Lema 1.30 *Considere $L \subset \mathbb{R}^\ell$ um conjunto convexo e $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava diferenciável. Se $\bar{\mathbf{x}} \in L$ é um ponto crítico de f , então $\bar{\mathbf{x}}$ é um maximizador global de f .*

Demonstração. Resultado análogo a Ribeiro e Karas (2013, Corolário 3.14). \square

O Lagrangiano associado ao problema (1.7) é dado por $\mathcal{L} : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^\ell$ dado por,

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}.$$

Os vetores $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ são ditos multiplicadores de Lagrange e estão associados aos custos marginais. A seguir temos as condições de otimalidade para o problema (1.7), que, sob hipóteses, garante a existência dos multiplicadores para uma solução local do problema. Este resultado, clássico na teoria de otimização, é conhecido como Teorema de KKT devido a Karush-Kuhn-Tucker.

Teorema 1.31 *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um maximizador local do problema (1.7) e suponha que os gradientes das restrições ativas em $\bar{\mathbf{x}}$ são linearmente independentes. Então existem os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ e $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^\ell$ tais que*

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^\ell \mu_i \bar{\mathbf{x}}_i &= 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m \\ \mu_i \bar{\mathbf{x}}_i &= 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, \ell \\ g(\bar{\mathbf{x}}) &\geq 0, \quad \bar{\mathbf{x}} \geq 0 \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue de Ribeiro e Karas (2013, Teorema 7.25). \square

A primeira igualdade refere-se à condição de otimalidade, propriamente dita. As segundas e terceiras linhas se referem à condição de complementaridade e indicam que os multiplicadores de Lagrange associados às restrições inativas são nulos. A quarta linha se refere à viabilidade da solução. E a última condição refere-se à não negatividade dos multiplicadores. Cabe ressaltar que é possível enfraquecer a hipótese de regularidade do teorema acima, através de outras condições de qualificação mais fracas que a independência linear dos gradientes, mas isto foge ao escopo deste texto.

1.3 CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Nesta seção serão apresentadas as três principais características que serão analisadas no decorrer deste trabalho, sendo eles: viés, consistência e eficiência. Estas três características serão determinantes para delimitar a qualidade da estimação dos parâmetros chave em relação aos seus valores originais. Desta forma partimos de definições preliminares para fundamentar os três principais conceitos utilizados neste trabalho.

Primeiramente devemos definir espaço amostral como:

Definição 1.32 *O espaço amostral para um dado experimento é dado por um conjunto K contendo todos os possíveis resultados deste experimento. (RUUD, 2000).*

Assim poderíamos ter o espaço amostral de um lançamento de um dado de seis faces como sendo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, descrevendo assim todas as possibilidades que poderíamos obter neste experimento. Assim faz-se necessário entender que um subconjunto de um espaço amostral chamaremos de evento. Assim:

Definição 1.33 *Um evento é um conjunto de possibilidades K_E de um dado experimento tal que $K_E \subseteq K$.*

Para um dado espaço amostral, assim como para um evento de um espaço amostral, temos a noção de probabilidade, que mede a frequência de ocorrência de um evento. Assim a frequência pode ser nula ou igual a unidade (quando descrevemos completamente o espaço amostral).

Definição 1.34 *A medida de probabilidade $Pr(\cdot)$ é uma função real de subconjuntos de um espaço amostral K tal que (RUUD, 2000):*

$$0 \leq Pr(K_E) \leq 1 \quad , \quad Pr(K) = 1.$$

No exemplo de um lançamento de dados pode-se ainda imaginar que tal experimento seja aleatório, de tal forma que o resultado pode ser visto como uma variável aleatória, de tal forma que:

Definição 1.35 *Uma variável aleatória $V(k)$ é uma função real com $k \in K$ tal que $\{k \in K | V(k) \leq v\}$ seja um evento para todo $v \in \mathbb{R}$ (RUUD, 2000).*

Partindo do primeiro elemento (menor elemento) de um espaço amostral e sua probabilidade de ocorrência indo em direção até o último elemento de um dado espaço amostral (maior elemento) podemos ir somando as probabilidades até descrever todas as possibilidades de ocorrência deste espaço amostral. Desta forma podemos introduzir a função de distribuição cumulativa.

Definição 1.36 A função de distribuição acumulada $F_V(\cdot)$ de uma variável aleatória $V = V(k)$ é a probabilidade (RUUD, 2000):

$$F_V(v) = \Pr(V \leq v).$$

Tendo em vista a existência de variáveis aleatórias discretas e contínuas outras duas definições pertinentes são função massa de probabilidade (para variáveis discretas) e função de distribuição de probabilidade (para variáveis discretas)

Definição 1.37 A função massa de probabilidade $f_V(\cdot)$ de uma variável aleatória $V = V(k)$ é dada por $f_V(v) = \Pr(V = v)$. quando $v \in K$ e $f_V(v) = 0$ caso contrário para todo $v \in \mathbb{R}$ (RUUD, 2000).

Definição 1.38 A função de distribuição de probabilidade $f_V(\cdot)$ de uma variável aleatória $V = V(k)$ é a função que satisfaz $F_V(v) = \int_{-\infty}^v f_V(x)dx$ para todo $v \in \mathbb{R}$ (RUUD, 2000).

Por fim a noção de esperança que nos servirá de base para a definição do viés.

Definição 1.39 A esperança, ou valor esperado, é dada por (GREENE, 2012):

$$E[y] = \sum_y y f_V(y) \quad \text{se } Y \text{ discreta.}$$

$$E[y] = \int_y y f_V(y) dy \quad \text{se } Y \text{ contínua.}$$

A esperança condicional como conceito complementar pode ser definida por:

Definição 1.40 A esperança condicional de uma variável aleatória X condicionada a Y é dada por:

$$E[X | Y](y) = E[X | Y = y].$$

Desta forma temos subsídio suficiente para definir o viés de um estimador. Suponhamos que exista um valor original para um parâmetro τ , de tal forma que utilizaremos um estimador que nos fornecerá o resultado $\hat{\tau}$. Assim a diferença entre estes valores será o viés do estimador em questão.

Definição 1.41 O viés de uma estimativa $\hat{\tau}$ em relação ao valor original τ será dado por:

$$Viés_{\tau} = E[\hat{\tau} - \tau] = E[\hat{\tau}] - \tau.$$

O ideal é que o viés seja sempre nulo, implicando que a estimativa é igual ao valor original do parâmetro em questão. Sendo assim quanto mais próximo de zero o viés for, melhor o estimador. Outro fator importante é a consistência, que pode ser obtida como convergência em probabilidade de uma sequência de estimadores, onde no caso esta sequência será determinada principalmente pelo tamanho da amostra.

Lema 1.42 *Uma sequência de variáveis aleatórias Y_N converge em probabilidade para uma constante \bar{Y} se e somente se para todo ϵ e $\delta > 0$ existir um $N^*(\epsilon, \delta)$ tal que:*

$$N > N^*(\epsilon, \delta) \Rightarrow \Pr(|U_N - U| < \epsilon) > 1 - \delta$$

Demonstração. Segue de Ruud (2000, Lema 13.1, Cap.13). □

Desta forma esperamos que uma sequência de estimadores convirja para o valor o parâmetro original em probabilidade. Por último definiremos eficiência relativa.

Definição 1.43 *Seja $\tau \in \mathbb{R}^\ell$ um vetor de parâmetros desconhecidos. Sejam $\hat{\tau}_A$ e $\hat{\tau}_B$ dois estimadores não enviesados. O estimador $\hat{\tau}_A$ será relativamente eficiente em relação a $\hat{\tau}_B$ se $\text{Var}[c^T \hat{\tau}_A] \leq \text{Var}[c^T \hat{\tau}_B]$ para todo $c \in \mathbb{R}^\ell$ (RUUD, 2000).*

2 TEORIA DA PRODUÇÃO E DUALIDADE

Funções de produção são um conceito muito bem estabelecido na literatura econômica. Elas permitem ao economista uma primeira abordagem de como a produção funciona, pois relacionam um vetor de insumos e outro de produtos. Na maior parte do tempo os economistas precisam prestar atenção em algumas de suas propriedades, para que de fato possam lidar com um problema econômico. Desta forma a simples relação entre insumo e produto não é suficiente. Ao mesmo passo é necessário ter em vista quais propriedades podem ser relaxadas e sob quais situações.

2.1 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO

Para explicitar a definição de uma função de produção, devemos primeiramente assumir um vetor de insumos \mathbf{x} pertencente a um espaço de insumos $L = \mathbb{R}_+^\ell$ sendo que cada x_i representa o i -ésimo insumo utilizado na produção. Neste trabalho apenas um produto será obtido, representado por $y \in \mathbb{R}_+$. Assim a função f é a relação que liga estes dois vetores, estabelecendo uma regra de produção utilizando \mathbf{x} e obtendo y , definida da seguinte forma:

Definição 2.1 *Uma função de produção f é a relação entre o vetor de insumos $\mathbf{x} \in L \subset \mathbb{R}_+^\ell$ e o escalar do produto final $y \in \mathbb{R}_+$, com cada \mathbf{x} relacionado a apenas um y .*

$$f : L \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Também podemos descrever da seguinte forma:

$$y = f(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Muitas funções de produção existem, cada qual com propriedades diferentes, porém em um primeiro momento há que se constatar certas propriedades comuns entre elas.

1. *Positividade:* O produto final y é sempre não-negativo para todo vetor de insumos \mathbf{x} não-negativo. Temos também que a trajetória (\mathbf{x}, y) parte da origem, visto que $f(\mathbf{0}) = 0$.
2. *Monotonicidade:* A primeira derivada parcial de f é sempre positiva para todo \mathbf{x} não-negativo.
3. *Concavidade 1:* A matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é semi-definida (ou definida) negativa em todo o conjunto L , ou seja, $\nabla^2 f(\mathbf{x}) \leq 0$ (ou $\nabla^2 f(\mathbf{x}) < 0$) para todo $\mathbf{x} \in L$.

4. *Concavidade 2*: Considere $L \subset \mathbb{R}^\ell$ convexo. A função de produção $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava, ou seja, para todo $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in L$ e $t \in [0, 1]$, tem-se que

$$f(t\mathbf{x}_0 + (1-t)\mathbf{x}_1) \geq tf(\mathbf{x}_0) + (1-t)f(\mathbf{x}_1).$$

5. *Convexidade do hipografo*: Sendo a função de produção côncava, seu hipografo $hipo(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid y \leq f(\mathbf{x})\}$ é um conjunto convexo (ver Lema 1.8).

Pelo Lema 1.30, a concavidade da função de produção em um conjunto convexo permite estabelecer relações de ótimo global, caso tenha pontos críticos. A concavidade também permite usar as funções de produção como restrição na maximização de lucro ou minimização de custos, fazendo assim com que as soluções ótimas encontradas sejam ótimos globais. Voltaremos a este tema, quando discutirmos questões relacionadas à teoria de dualidade.

A última propriedade pode ser analisada sob a noção do conjunto de possibilidades de produção. Para produzir uma quantidade y muitas cestas de insumos \mathbf{x} podem ser utilizadas, porém o interesse do produtor é usar a cesta que consome a menor quantidade de insumos, em outras palavras a mais eficiente. No entanto, mesmo que seja esta a busca do produtor, ineficiências não podem ser descartadas, e portanto a noção do conjunto de possibilidades é importante.

Definição 2.2 (*DIEWERT, 1971, 2.6, p.486*) *O conjunto de possibilidade de produção para qualquer produto $y \geq 0$ é dado por:*

$$L(y) = \{\mathbf{x} \geq 0 : f(\mathbf{x}) \geq y\}. \quad (2.2)$$

Desta definição e do Lema 1.8, o conjunto de todas as cestas que podem produzir uma determinada quantidade de produto deve ser um conjunto convexo. Tal definição é bastante importante para a análise do problema de minimização de custos que será visto mais adiante. Poderia-se dizer, inclusive, que este conjunto de possibilidades como definido acima seria o hipografo das escolhas “mais eficientes” para a produção de uma quantidade y de produto.

Economicamente o grau de homogeneidade de uma função de produção nos fornece informação sobre os retornos de escala da mesma. Com isto pode-se dizer que dado um grau qualquer de homogeneidade, sempre que aumentarmos os insumos empregados em 100% teremos que o produto final aumentará na proporção do produto entre o aumento de insumos utilizados e o grau de homogeneidade. Neste trabalho serão utilizadas funções com retorno decrescente de escala, ou seja: sempre que aumentarmos a utilização de insumos em uma dada proporção, o produto final irá crescer em uma proporção menor. Isto pode ser exemplificado por funções de produção com grau de homogeneidade menores que 1.

2.1.1 Elasticidade de Substituição

Uma das propriedades mais interessantes para a análise econômica das funções de produção é a capacidade de substitubilidade entre os insumos utilizados. Desta forma um dos conceitos mais importantes deste tópico é a elasticidade de substituição. Este conceito nos mostra quão fácil podemos substituir um insumo por outro (MILLER, 2008). A elasticidade de substituição para uma função de produção $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ utilizando apenas dois bens foi definida por Hicks (1963) como:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}}{f(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}}. \quad (2.3)$$

Muitas outras formas para representar esta medida para funções com mais de dois insumos foram utilizadas. Há a elasticidade de substituição parcial de Allen (1938) que foi utilizada por Uzawa (1962) na busca de generalizar o caso da CES Arrow-Chenery-Minhas-Solow (ACMS) para ℓ insumos. Outras duas formas de medir elasticidade de substituição foram usadas por McFadden (1963) para o mesmo esforço de generalização; neste trabalho, McFadden (1963) utiliza os conceitos de [i] elasticidade de substituição parcial direta e [ii] elasticidade de substituição parcial sombra. Somente no esforço de generalização da CES-ACMS outras três formas de elasticidade de substituição foram utilizadas.

Utilizando a elasticidade de substituição proposta por Hicks (1963), temos que quanto mais próxima de 0, mais a firma opera com proporções fixas entre os insumos utilizados. De forma análoga quando $\sigma \rightarrow \infty$ temos substitubilidade perfeita entre os insumos. Nos demais valores temos situações em que a substitubilidade entre os insumos existe em maior ou menor grau.

Outra forma de trabalhar com (2.3) pode ser obtida quando temos conhecimento do vetor ω de custo dos fatores. Destarte Miller (2008):

$$\sigma = \frac{\% \Delta(x_1/x_2)}{\% \Delta(\omega_1/\omega_2)}. \quad (2.4)$$

Desta forma temos a noção de que a mesma medida que obtemos em (2.3) pode através de (2.4) dizer que a substitubilidade da proporção dos insumos está relacionada com a mudança percentual dos preços relativos dos insumos.

Devido ao significado econômico da elasticidade de substituição que este parâmetro se tornou relevante. As análises que se utilizam das relações que temos em (2.3) e (2.4) podem servir para determinar como a alocação dos rendimentos dos insumos utilizados desempenha seu papel no crescimento de determinados setores e países. A correta percepção prática da elasticidade de substituição entre insumos consumidos, na lógica intra e inter setores, pode auxiliar o economista a desenvolver uma melhor compreensão para políticas econômicas mais eficientes, visando estímulos melhor direcionados.

Muitas são as ferramentas que necessitam da elasticidade de substituição para fazer prognósticos mais eficazes. Desde a percepção de uma grande fazenda ou indústria que visa otimizar sua produção, até mesmo a categorização de um setor específico que enseja estímulos diversos dependem deste parâmetro. Os trabalhos de equilíbrio geral computável também dependem de pressupostos ou estimações adequadas da elasticidade de substituição.

Justamente pela necessidade que a análise econômica demanda, que este trabalho terá como objetivo a estimação dos parâmetros pertinentes para a obtenção de valores mais seguros para a elasticidade de substituição. Na próxima seção veremos formas funcionais para a função de produção e como a elasticidade de substituição depende da forma funcional escolhida.

2.2 FORMAS FUNCIONAIS

Uma vez que noções importantes sobre funções de produção foram expostas, pode-se inserir algumas formas funcionais clássicas. As formas funcionais poderiam ser escritas como uma expansão da definição de função de produção com a inserção de um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$. Este novo vetor de parâmetros que ditaria o formato que a função deve assumir. Permanecendo em certa simplicidade, o vetor $\boldsymbol{\nu}$ que ditará a forma como calculamos a elasticidade de substituição entre os insumos consumidos, ou seja $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\nu})$. Dito isto é importante ressaltar que existem casos de formas funcionais com elasticidade de substituição variável da forma $\sigma = \sigma(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x})$ como é o caso do trabalho de Revankar (1971), onde diferentes alocações entre os insumos implica em elasticidades de substituição diferentes. Como uma medida simplificadora, mas não menos poderosa, este trabalho se utilizará de formas funcionais as quais a elasticidade de substituição seja constante e dependente, principalmente, dos parâmetros em $\boldsymbol{\nu}$. Destarte, a definição ampliada de uma função de produção considerando uma forma funcional deve ser:

Definição 2.3 *Uma forma funcional f de uma função de produção qualquer é a relação entre o vetor de insumos $\mathbf{x} \in L \subset \mathbb{R}_+^\ell$ e o escalar do produto final $y \in \mathbb{R}_+$, com todos \mathbf{x} relacionados a apenas um y com a inserção de uma forma específica delimitada por um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$, ou seja,*

$$y = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}). \quad (2.5)$$

Uma das funções de produção mais populares é a Cobb-Douglas definida inicialmente por Cobb e Douglas (1928) como $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$f(x) = Ax_1^a x_2^{1-a},$$

com $A > 0$ e $a \in (0, 1)$. Esta função tem retornos constantes de escala, que incorre em uma elasticidade de substituição sempre constante e igual a 1, independente do vetor $\boldsymbol{\nu}$.

A função Cobb-Douglas é estendida em \mathbb{R}_+^ℓ por

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\ell} x_i^{a_i}, \quad (2.6)$$

que em alguns pontos pode expressar retornos de escalas decrescentes ou crescentes. O grau de homogeneidade, ou seja o retorno de escala, é igual a $\sum_{i=1}^{\ell} a_i$, porém a elasticidade de substituição entre os insumos é sempre igual a 1.

Note que se o grau de homogeneidade da função Cobb-Douglas (2.6) é maior que 1, sua concavidade não é garantida, fazendo com que não seja possível alcançar soluções globais. Além do mais a restrição da elasticidade de substituição sempre igual a unidade não permite grande flexibilidade da mesma.

Visando uma função de produção mais versátil e que pudesse abranger elasticidades de substituição $\sigma \in (0, \infty)$, Arrow et al. (1961) propuseram uma função de produção $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ que parte apenas da noção da elasticidade de substituição constante, definida por:

$$f(\mathbf{x}) = A(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}. \quad (2.7)$$

Desta forma ganhamos algumas vantagens no tratamento da teoria produção. Agora a elasticidade de substituição é dada por $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$, que acaba limitando $\rho \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, uma vez que $\sigma \in (0, \infty)$. Isto porque a elasticidade de substituição σ tende a infinito quando ρ se aproxima de -1 , por outro lado tende a zero quando ρ tende a infinito. O parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ determina a alocação ótima entre os dois insumos. Por fim $A > 0$ representa a produtividade, funcionando como um escalar de ajuste da função com os insumos para chegar no patamar da produção final A . O grau de homogeneidade da função é sempre 1 nesta especificação.

2.2.1 Propriedades da forma funcional CES-ACMS

Preliminarmente, é interessante garantir as propriedades enumeradas na Seção 2.1 para (2.7). Sua positividade é garantida uma vez que, com exceção de ρ , todos os valores envolvidos são maiores ou iguais a zero. Tendo em vista que qualquer potência de números reais positivos a números reais existem e são positivas, o parâmetro $\rho \neq 0$ não cria problemas nesta especificação.

Para verificar a segunda propriedade, note que suas derivadas parciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= A\alpha x_1^{-\rho-1}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}-1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= A(1 - \alpha)x_2^{-\rho-1}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que todos os termos são ainda maiores ou iguais a zero, com exceção dos expoentes em que ρ aparece, teremos então apenas valores positivos para as primeiras derivadas de f em relação a qualquer x .

Para demonstrar a concavidade da função CES-ACMS faremos uso de teoremas expostos no Capítulo 1. Desta forma dois teoremas importantes para garantir a concavidade de (2.7) nos indicam que tal prova deve ser feita em duas etapas. Uma para o caso em que $\rho \in (-1, 0)$. Como ρ é negativo, aplicaremos a transformação estritamente crescente $g(x) = x^{-\rho}$ à função f , obtendo a função h :

$$h(\mathbf{x}) = A^{-\rho}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho}). \quad (2.8)$$

A Hessiana desta função é dada por

$$\nabla^2 h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A^{-\rho} \alpha x_1^{-\rho-2}(\rho^2 + \rho) & 0 \\ 0 & A^{-\rho}(1 - \alpha)x_2^{-\rho-2}(\rho^2 + \rho) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Para um vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ arbitrário não nulo temos:

$$\mathbf{v}^T \nabla^2 h(\mathbf{x}) \mathbf{v} = A^{-\rho}(\rho^2 + \rho) (a^2 \alpha x_1^{-\rho-2} + b^2 (1 - \alpha)x_2^{-\rho-2}).$$

Como $\alpha \in (0, 1)$ e os demais termos são positivos, o termo entre parênteses é positivo. Por outro lado, como $\rho \in (-1, 0)$, $\rho^2 + \rho < 0$, desta forma temos que $\mathbf{v}^T \nabla^2 h(\mathbf{x}) \mathbf{v} < 0$, para todo \mathbf{v} não nulo, mostrando que a Hessiana é definida negativa, o que implica que h é côncava. Uma vez que encontramos uma função côncava a partir de uma transformação monotônica crescente g , pelo Teorema 1.14 temos que a função CES-ACMS é quase-côncava no intervalo quando $\rho \in (-1, 0)$. Aplicando o Teorema 1.15 temos a garantia da sua concavidade.

Por outro lado, quando $\rho > 0$, a transformação g para garantir o Teorema 1.14 é o logaritmo natural. Assim, considere

$$h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = \ln(A) - \frac{1}{\rho} \ln(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho}). \quad (2.10)$$

A Hessiana desta função é dada por

$$\nabla^2 h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha x_1^{-\rho-2}((1 - \alpha)(\rho + 1)x_2^{-\rho} + \alpha x_1^{-\rho})}{(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^2} & \frac{\alpha x_1^{-\rho-1}(1 - \alpha)x_2^{-\rho-1}\rho}{(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^2} \\ \frac{\alpha x_1^{-\rho-1}(1 - \alpha)x_2^{-\rho-1}\rho}{(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^2} & -\frac{(1 - \alpha)x_2^{-\rho-2}((1 - \alpha)x_2^{-\rho} + \alpha(\rho + 1)x_1^{-\rho})}{(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^2} \end{bmatrix}.$$

O primeiro termo desta matriz é negativo, uma vez que todos os valores envolvidos são positivos e restou um sinal negativo. Já o determinante da Hessiana, dado por:

$$\frac{\alpha x_1^{-\rho-2}(1 - \alpha)x_2^{-\rho-2}(\rho + 1)}{(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^2} > 0, \quad (2.11)$$

é positivo, o que implica que a função h é côncava. Logo, pelo Teorema 1.14, a CES-ACMS é quase-côncava quando $\rho > 0$. Assim, o Teorema 1.15 garante que a CES-ACMS é côncava. Consequentemente, a CES é côncava em \mathbf{x} para qualquer $\rho \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

2.2.2 Expansão da função CES

Uma vez definida a função CES, algumas características importantes foram adicionadas no decorrer do tempo. A função como vista anteriormente não permite retornos de escala crescentes ou decrescentes, apenas crescentes. Isto engendra uma série de complicações em alguns casos, pois mesmo côncava, a função (2.7) geraria soluções ilimitadas superiormente em contextos de conjunto restrição para maximização do lucro. Adicionando um parâmetro γ ao modelo poderemos analisar retornos de escala crescentes e decrescentes, tal como foi posto por Kmenta (1967). Elevando os termos entre parênteses de (2.7) a este parâmetro teremos a evolução da CES proposta por Arrow et al. (1961). Assim:

$$f(\mathbf{x}) = A(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (2.12)$$

A concavidade da expansão desta forma, com retornos decrescentes de escala, ou seja, com $\gamma \in (0, 1)$ segue dos Teoremas 1.14 e 1.16.

Ainda tentando expandir a CES, utilizaremos um fator de evolução tecnológica neutra de Hicks. Para tanto adicionaremos a expressão $e^{\theta t}$ com θ indicando a taxa de mudança tecnológica, como se fosse um fator de ajuste para A no decorrer do tempo medido por t . Desta forma não há mudança alguma nos teoremas que provam a concavidade da nossa CES. Assim teremos:

$$f(\mathbf{x}) = Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (2.13)$$

Neste caso a elasticidade assume valores diferentes, mas ainda pautados apenas no vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$. Utilizando-se de (2.3) teremos que levar em consideração as primeiras derivadas parciais em função dos insumos consumidos e a derivada segunda em relação a cada insumo, assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= Ae^{\theta t} \gamma \alpha x_1^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= Ae^{\theta t} \gamma (1 - \alpha) x_2^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= Ae^{\theta t} \gamma (\gamma + \rho) \alpha (1 - \alpha) x_1^{-\rho-1} x_2^{-\rho-1} (\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}-2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.3), teremos a elasticidade de substituição da CES dada por:

$$\sigma = \frac{\gamma}{\gamma + \rho}. \quad (2.14)$$

Considerando que a elasticidade de substituição deve ser positiva, uma vez que $\gamma > 0$, teremos que garantir que o denominador seja positivo, de tal forma que $\gamma + \rho > 0$ que implica $\rho > -\gamma$ como condição para a positividade de σ .

Admitidas as propriedades para a função CES poderemos então expandir o trabalho na direção da dualidade.

2.3 DUALIDADE

A palavra dualidade remete a ideia de duas formas diversas e complementares para se referir a um determinado assunto. Na teoria da produção, partindo desta noção, enseja-se uma teoria da dualidade; onde uma vez que temos a função de produção descrita por uma forma funcional do tipo $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})$, existiria também uma função dual do tipo $f_d(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\nu})$ onde o subscrito d remete à forma dual e sua ausência à forma primal. Estas duas funções diversas (primal e dual) terão no decorrer desta seção a mesma propriedade básica de estarem sujeitas ao mesmo vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$, representando assim uma das principais características da dualidade na teoria da produção. Matematicamente existem duas formas de se trabalhar com essa ideia de dualidade, uma primeira que se utilizará do teorema do envelope (HOTELLING, 1932; HOTELLING, 1935; SHEPHARD, 1953) como principal eixo de ligação das funções primal e dual; e uma segunda forma, mais recente (PARIS; CAPUTO, 1995; POPE, 1982), baseada na envoltória convexa e no teorema de Minkowski e teorema de Hahn-Banach na forma geométrica (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993, 4.1.1 e 4.1.2, cap. 3, p. 121-122).

2.3.1 Teorema do Envelope e dualidade de Hotelling e Shephard

As primeiras formas para se trabalhar com a dualidade envolvem o teorema do envelope. Em condições de otimalidade uma função de produção pode descrever também funções de custo ou lucro. Uma vez que estas funções de custo e lucro estarão sujeitas também ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$, estas mesmas funções sob condições de otimalidade também descreverão a função de produção original. Veremos a seguir a função lucro Π , introduzida em Hotelling (1932), e definida de forma mais próxima da notação deste trabalho por Diewert (1982), Bittencourt e Sampaio (2011).

Definição 2.4 *Uma função de lucro é a diferença entre a receita dada pela função de produção multiplicada pelo preço de venda e os custos, resultantes do somatório dos produtos dos insumos consumidos e seus respectivos preços.*

$$\Pi(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}, p, \boldsymbol{\omega}) = pf(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Partindo do pressuposto de que o produtor é tomador de preços, o problema da maximização de lucros decorre apenas do ajuste das quantidades de insumos consumidas e do produto final. Desta forma o problema da maximização de lucro pode ser descrito através de:

$$\Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = \max_{\mathbf{x}} \{pf(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}\}. \quad (2.16)$$

Essa maximização irrestrita resulta na seguinte condição, decorrente das condições de primeira ordem:

$$\nabla_{f(\mathbf{x}), \mathbf{x}} \Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = (p, \boldsymbol{\omega}). \quad (2.17)$$

Neste caso, Hotelling (1932) diz que deve existir, de forma dual, uma função que utilizando da condição de primeira ordem nos forneceria como resultado as quantidades empregadas na produção (assim como a própria produção no formato como trataremos). É esta segunda

forma que ficou conhecida como teorema de Hotelling (POPE, 1982). Destarte, segue a forma dual.

$$\nabla_{p,\omega}\Pi(p,\omega) = (f(\mathbf{x}), \mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Por forma dual pode-se começar a entender que existe uma troca de variáveis. Fundamentalmente as quantidades consumidas na produção e a própria quantidade produzida como resultado final seriam consideradas as variáveis primais, de tal forma que com a mudança das variáveis por preços temos a forma dual. Como primeira forma de função dual teríamos neste caso a função lucro. Shephard (1953) posteriormente mostrou de maneira mais formal (DIEWERT, 1982) a dualidade que existe entre uma função de produção e uma função dual, sendo que em seu trabalho primeiramente ele utilizou-se da função distância para posteriormente estabelecer a dualidade entre função de produção e função de custos. A função de custo, já utilizada na definição da função lucro será introduzida com mais atenção posteriormente tendo em vistas a cronologia entre as obras de Hotelling e Shephard.

Utilizando-se do comportamento otimizador, a ideia é de que o produtor busque minimizar o custo dado um nível de produção mínimo $\bar{y} > 0$. Desta forma a função custo poderia ser obtida da seguinte forma:

$$C(\bar{y}, \omega) = \begin{cases} \text{minimizar} & \omega^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & f(\mathbf{x}) \geq \bar{y}. \end{cases} \quad (2.19)$$

De acordo com (2.19), Diewert (1982) assume, de forma sucinta, 7 características de regularidade para a função de custo, de tal modo que o teorema de Shephard (1953) se verifique:

1. *Não-negatividade*: O custo final C é sempre não-negativo para todo vetor de insumos \mathbf{x} não-negativo e de preços ω positivo.
2. *Linearmente homogênea em ω* : Para qualquer $k > 0$, vale $C(\bar{y}, k\omega) = kC(\bar{y}, \omega)$.
3. *Não-descrescente em relação a ω* : Para dois vetores de preços tais que $\omega_1 > \omega_0$ temos que $C(\bar{y}, \omega_1) \geq C(\bar{y}, \omega_0)$.
4. *Concavidade*: Para um valor fixado de $y = \bar{y}$ e para todos ω_0, ω_1 e $t \in [0, 1]$, vale

$$C(t(\bar{y}, \omega_0) + (1-t)(\bar{y}, \omega_1)) \geq tC(\bar{y}, \omega_0) + (1-t)C(\bar{y}, \omega_1).$$

5. *Continuidade em ω* : Fixado $\bar{y} > 0$, temos que $\lim_{\omega \rightarrow \bar{\omega}} C(\bar{y}, \omega) = C(\bar{y}, \bar{\omega})$, para todo $\bar{\omega}$.
6. *Não-descrescente em relação a y* : Fixado ω , para dois valores de y tais que $y_1 > y_0$ temos que $C(y_1, \omega) \geq C(y_0, \omega)$.
7. *Semi-continuidade inferior em y* : Para todo $\bar{\omega} \geq 0$, a função $C(y, \bar{\omega})$ é semi-contínua inferior.

Teorema 2.5 (SHEPHARD, 1953; DIEWERT, 1982) *Suponha que a função $C(y, \omega)$ satisfaz as sete propriedades acima e seja diferenciável no ponto $(\bar{y}, \bar{\omega})$ correspondente ao ponto de otimalidade de (2.19). Então:*

$$\mathbf{x}(\bar{y}, \bar{\omega}) = \nabla_{\omega} C(\bar{y}, \bar{\omega}). \quad (2.20)$$

Este teorema nos diz que o vetor de equações de demanda por fatores será igual ao gradiente da função de custo em relação aos preços no ponto $(\bar{y}, \bar{\omega})$ correspondente ao ponto ótimo do problema de minimização de custos.

2.3.2 Dualidade e Envoltória Convexa

Pelo Lema 1.8, o hipografo de uma função de produção côncava, é um conjunto convexo e como tal, pode ser descrito de forma dual pela intersecção de todos os semi-espacos que o contém, de acordo com o Teorema 1.19 e (1.2). Mas afinal, qual a implicação disto em termos de análise econômica?

Primeiramente deve-se observar que tanto a função de custo, como a função de lucro, são lineares, e consequentemente seu gráficos são hiperplanos. Uma vez que uma das características da otimização é a tangência entre a função de produção com o hiperplano de custos ou lucro, a intersecção entre todos os semi-espacos, sustentados pelos hiperplanos de custo ou lucro ótimos, que contenham a função de produção em questão irá descrever perfeitamente todas as possibilidades de produção da mesma. Em outras palavras, a ideia de tecnologia fundamentada pelas formas funcionais fundamentadas pelo vetor de parâmetros ν será preservada pela descrição dual do conjunto de possibilidades.

Parece desta forma que existem duas formas de definir um conjunto de possibilidades de produção. Uma primeira que poderia ser chamada de “interna” que seria pela própria função de produção e o conjunto de todos os pontos (\mathbf{x}, y) tais que $y \leq f(\mathbf{x})$; e uma segunda forma, “externa” que corresponde à intersecção de todos os semi-espacos sustentados por hiperplanos de custo ou lucro que separam o conjunto de possibilidades de produção de todos os pontos que a ele não pertencem. Reescrevendo (1.2) para o caso da função lucro teríamos:

$$L = \{(p, -\omega)^T(y, \mathbf{x}) \leq \mu_L(p, -\omega) : \forall (p, \omega) \in \mathbb{R}^{\ell+1}\}. \quad (2.21)$$

A definição de conjunto como em (2.21) pode ser entendida também de que o lucro auferido pelo produtor tem que ser sempre menor ou igual ao máximo lucro que se poderia obter para qualquer vetor de preços do produto e insumos.

2.3.3 Solução dual

Uma vez compreendido alguns detalhes sobre a questão da dualidade, principalmente entre função de produção e a função lucro, pode-se discutir as implicações de uma solução dual.

A solução dual consiste basicamente na utilização das variáveis de custo e preço de produção quando usamos a função de lucro para nos auxiliar a descrever uma função de produção. As vantagens desta alternativa em descrever o consumo do produtor para fins de estimação

envolvem a capacidade de demandar menor quantidade de dados. Além disso, os erros de medida parecem ser menores nas variáveis de mercado (preços) quando postas na contrapartida na medição das variáveis da produção (quantidades consumidas, por exemplo).

O problema que segue nos fornecerá a descrição das variáveis de produção em função das variáveis de mercado, podendo nos auxiliar na construção de um modelo dual posteriormente. Busca-se, então, substituir a descrição da tecnologia do tipo $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu})$ por $f_d(p, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$. Assim o Teorema 1.31 das condições de KKT é o ponto de partida.

Dados $p > 0$ e $\boldsymbol{\omega} \geq 0$, considere o problema

$$\begin{cases} \underset{y, \mathbf{x}}{\text{maximizar}} & py - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & y \leq Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & y \geq 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

cujo Lagrangeano associado é dado por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, y, \lambda, \boldsymbol{\mu}_x, \mu_y) = py - \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x} + \lambda(Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} - y) + \boldsymbol{\mu}_x^T \mathbf{x} + \mu_y y. \quad (2.23)$$

E de acordo com o Teorema 1.31, se (y, \mathbf{x}) é solução do problema, então existem os multiplicadores de Lagrange $\lambda, \mu_y \in \mathbb{R}_+$ e $\boldsymbol{\mu}_x \in \mathbb{R}_+^2$ tais que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} p \\ -\omega_1 \\ -\omega_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma+\rho}{\rho}} \gamma \alpha x_1^{-\rho-1} \\ Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma+\rho}{\rho}} \gamma (1 - \alpha) x_2^{-\rho-1} \end{pmatrix} + \\ + \mu_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_{x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_{x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda(Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} - y) = 0 \\ \mu_y y = 0 \\ \mu_{x_1} x_1 = 0 \\ \mu_{x_2} x_2 = 0 \\ y \leq Ae^{\theta t}(\alpha x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)x_2^{-\rho})^{-\frac{\gamma}{\rho}} \\ \mathbf{x}, y, \lambda, \mu_y, \mu_{x_1}, \mu_{x_2} \geq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

As restrições em relação a y implicam que a restrição deve ser ativa e que $\lambda = p$ ou no caso em que a solução é a origem $\lambda = p + \mu_y$. Este resultado pode ser pensado da seguinte forma: a condição de otimalidade em relação a y nos fornece a seguinte relação $p - \lambda + \mu_y = 0$. Caso tenhamos $y = 0$ ambas as restrições que envolvem y devem ser ativas, assim como os multiplicadores em relação à quantidade de insumos consumida na produção, fazendo com que $x_1 = x_2 = 0$. Havendo qualquer nível de produção o vetor $\boldsymbol{\mu}$ será nulo. Desta forma a condição de viabilidade, complementaridade e não-negatividade dos multiplicadores nos levam a $\lambda = p$.

Derivando daí teremos os seguintes pontos ótimos do problema, quando há nível de produção maior que zero:

$$x_1 = \left(\frac{pAe^{(\theta t)}\alpha\gamma}{\omega_1 \left((1-\alpha) \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + \alpha \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.25)$$

$$x_2 = \left(\frac{pAe^{(\theta t)}(1-\alpha)\gamma}{\omega_2 \left(\alpha \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{-\rho}{\rho+1}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (2.26)$$

Substituindo estas expressões em y , obtém-se

$$y = Ae^{(\theta t)} \left(\alpha \left(\frac{pAe^{(\theta t)}\alpha\gamma}{\omega_1 \left((1-\alpha) \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + \alpha \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{-\rho}{1-\gamma}} + (1-\alpha) \left(\frac{pAe^{(\theta t)}(1-\alpha)\gamma}{\omega_2 \left(\alpha \left(\frac{\omega_2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)} \right)^{\frac{-\rho}{\rho+1}} + (1-\alpha) \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\rho}}} \right)^{\frac{-\rho}{1-\gamma}} \right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (2.27)$$

A solução dual consiste em utilizar estas três expressões na função objetivo.

3 SIMULAÇÃO E ESTIMAÇÃO

Vários textos fornecem mecanismos de estimação e simulação para várias formas funcionais. Neste capítulo o desenho da simulação Monte-Carlo será feito, utilizando-se assim das formas primal e dual de uma função de produção do tipo CES que foi vista no capítulo anterior. Partindo do ponto de vista da CES, um processo de estimação pioneiro é baseado em uma expansão de Taylor truncada (KMENTA, 1967). Depois deste esforço em fornecer uma forma linear para a estimação de uma CES, outros estudos com simulação Monte Carlo mostraram resultados satisfatórios para a estimação dos parâmetros de uma função CES utilizando estimadores não lineares, com a exceção do valor de ρ (KUMAR; GAPINSKI, 1974; CORBO, 1977; THURSBY; LOVELL, 1978). A formulação de Kmenta (1967), também, serviu de comparação inicial para algumas simulações Monte Carlo, buscando compreender o alcance deste método com outras formas de estimar os parâmetros de uma CES. Thursby e Lovell (1978) através de simulação Monte Carlo levantam a hipótese de que a expansão de Taylor truncada de Kmenta (1967), justamente por ser uma expansão truncada, já tem embutida na sua construção omissão de variáveis relevantes no processo de estimação, uma vez que a aproximação linear de uma expansão de Taylor de primeira ordem não abrange toda a forma de uma função de produção que não seja linear; os parâmetros estimados, desta forma, tendem a ser viesados e inconsistentes (THURSBY; LOVELL, 1978), de forma semelhante com a conclusão de Corbo (1977) sobre a questão do viés. Dentro dos estimadores não lineares (CORBO, 1977) parte de um procedimento de procura através de repetidas regressões em OLS (Ordinary Least Squares) para alcançar o resultado esperado de um NLLS (Non-Linear Least Squares); porém este método exige muitas iterações até se encontrar uma solução. Por outro lado temos a utilização de um estimador não-linear do tipo Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963), que oferece estimativas com pouco viés para a maioria dos parâmetros, com exceção de ρ (THURSBY; LOVELL, 1978; THURSBY, 1980; KUMAR; GAPINSKI, 1974).

Parte fundamental do trabalho de simulação e de regressão econométrica é o padrão estocástico dos erros. Dependendo de como as variáveis geradas sofrem distúrbios, o resultado geral da simulação é diverso. Dependendo da construção do modelo, o termo estocástico também deve ser considerado parte integrante do mesmo (BROWN; WALKER, 1995), uma vez que considerando erros de medidas, como por exemplo no consumo de insumos, podem levar a inconsistências da dualidade, mostrando que a forma primal e dual podem corresponder a estimações diferentes dos parâmetros da forma funcional em questão (LUSK et al., 2002; BITTENCOURT; SAMPAIO, 2011), assim como a própria interpretação do erro é diversa entre as duas formas de estimação (KUMBHAKAR; TSIONAS, 2011). A possibilidade de se trabalhar uma função de produção de duas formas diferentes, utilizando-se variáveis como quantidades (primal) e preços (dual) fornece uma maior flexibilidade do trabalho ao econometrista. Tendo em vista as dificuldades que podem surgir, no decorrer deste capítulo iremos desenhar a simulação Monte Carlo partindo da construção dos dados tendo em vista o ponto ótimo de produção sob o viés do lucro. Posteriormente o distúrbio será incorporado para comparar o

poder de duas estimações diferentes para o caso dual; será utilizada a metodologia da expansão de Taylor truncada (KMENTA, 1967) para estimar o nível de produção através de variáveis duais, assim como também será utilizado o estimador Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963) para a forma dual.

3.1 DESENHO DA SIMULAÇÃO

A simulação Monte Carlo (BRANDIMARTE, 2014) parte da geração de variáveis uniformemente distribuídas $U_i (0, 1)$; variáveis estas que podem ser obtidas por métodos aleatórios (manuais) ou pseudo-aleatórios (utilizando-se de poder computacional e algoritmos).

Em um segundo momento estas variáveis uniformemente variadas serão transformadas de modo que se possa gerar variáveis com diversos padrões estocásticos; este grupo de dados poderia ser considerado como as variáveis exógenas do modelo que será trabalhado. Uma vez que um pressuposto teórico é o de firma tomadora de preço, serão essas as variáveis que geraremos neste segundo passo. Em textos que simulam a partir da forma primal é comum que se escolham regras para gerar as quantidades de insumos consumidas (KUMAR; GAPINSKI, 1974; CORBO, 1977; THURSBY; LOVELL, 1978; THURSBY, 1980).

Uma vez que as principais variáveis exógenas foram geradas, através de regras da modelagem, obtém-se as variáveis endógenas. Desta forma obtém-se as variáveis dependentes no caso da estimação dual. Por outro lado, no caso da estimação da forma primal, uma vez que foram descritas as variáveis endógenas de quantidades consumidas de insumos através das variáveis duais (preços), as mesmas serão geradas através destes dados. Deste modo ter-se-á até aqui a geração dos vetores $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ por um processo estocástico partindo de dados pseudo-aleatórios; e gerados por formas funcionais serão $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\Pi})$.

Por último serão adicionados os termos de erros estocásticos. Neste procedimento diferentes formas de entender o comportamento da estimação podem ser incorporados, sendo assim, junto com o segundo passo, uma das etapas mais ricas para a compreensão do potencial do modelo de estimação.

3.1.1 Geração das variáveis

Um dos procedimentos para gerar variáveis normalmente distribuídas é o processo de Box-Muller (ROSS, 1942). Neste modelo duas variáveis uniformemente distribuídas serão transformadas em dois pares de variáveis normais. Supondo duas variáveis U_1 e U_2 uniformemente distribuídas de 0 a 1 serão transformadas em duas variáveis aleatórias normalmente distribuídas X_1 e X_2 através do seguinte processo:

$$X_1 = (-2 \ln U_1)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi U_2.$$

$$X_2 = (-2 \ln U_1)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi U_2.$$

Este processo gera 2 pares de variáveis com média 0 e desvio padrão 1. Uma vez que precisamos gerar 3 pares de variáveis, serão geradas, assim, 4 variáveis uniformemente variadas para gerar 4 variáveis normais, descartando-se a quarta variável obtida.

Os preços serão arbitrariamente fixados como $(\omega_1, \omega_2, p) = (3, 20, 15)$ com desvios padrão $(\sigma_{\omega_1}, \sigma_{\omega_2}, \sigma_p) = (0.2, 2.5, 1)$. Desta forma após obtermos as variáveis normalmente distribuídas multiplicaremos as mesmas pelos desvios padrão, para enfim adicionar os preços médios. Assim os vetores de preços normalmente distribuídos serão dados por:

$$\omega_{1N} = X_1 * \sigma_{\omega_1} + \omega_1.$$

$$\omega_{2N} = X_2 * \sigma_{\omega_2} + \omega_2.$$

$$p_N = X_3 * \sigma_p + p.$$

Tabela 1 – Valores ótimos de insumos consumidos, produção e lucro

A	α	ρ	γ	θ	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{y}	$\bar{\Pi}$
3	0.1	-0.5	0.8	0.002	0.023	0.043	0.231	0.230
3	0.1	-0.5	0.9	0.002	0.003	0.006	0.027	0.013
3	0.1	0.1	0.8	0.002	0.031	0.041	0.228	0.226
3	0.1	0.1	0.9	0.002	0.004	0.005	0.026	0.013
3	0.1	0.5	0.8	0.002	0.033	0.040	0.227	0.225
3	0.1	0.5	0.9	0.002	0.004	0.005	0.026	0.013
3	0.1	1	0.8	0.002	0.034	0.040	0.226	0.224
3	0.1	1	0.9	0.002	0.004	0.005	0.026	0.013
3	0.5	-0.5	0.8	0.002	6.084	0.188	5.252	5.247
3	0.5	-0.5	0.9	0.002	39.735	0.912	30.535	15.230
3	0.5	0.1	0.8	0.002	0.558	0.101	0.921	0.917
3	0.5	0.1	0.9	0.002	0.413	0.075	0.608	0.301
3	0.5	0.5	0.8	0.002	0.277	0.079	0.602	0.599
3	0.5	0.5	0.9	0.002	0.120	0.035	0.233	0.115
3	0.5	1	0.8	0.002	0.169	0.066	0.456	0.453
3	0.5	1	0.9	0.002	0.052	0.020	0.125	0.061
3	0.9	-0.5	0.8	0.002	443.251	0.124	333.059	333.054
3	0.9	-0.5	0.9	0.002	518702.511	146.995	346453.632	173220.733
3	0.9	0.1	0.8	0.002	83.084	2.029	72.439	72.357
3	0.9	0.1	0.9	0.002	14421.340	355.787	11192.102	5580.746
3	0.9	0.5	0.8	0.002	21.744	1.433	23.459	23.400
3	0.9	0.5	0.9	0.002	920.516	61.275	885.419	440.049
3	0.9	1	0.8	0.002	5.839	0.761	8.178	8.147
3	0.9	1	0.9	0.002	66.108	8.707	82.685	40.963

Estes 3 vetores de preços gerarão posteriormente as outras variáveis do modelo seguindo os pontos ótimos obtidas através do problema de maximização de lucro. Para tanto, também de forma arbitrária, serão selecionados os vetores de parâmetros da CES. Assim, os parâmetros escolhidos são $A = 3$, $\alpha = (0.1, 0.5, 0.9)$, $\rho = (-0.5, 0.1, 0.5, 1)$, $\gamma = (0.8, 0.9)$, $\theta = 0.002$, formando 24 vetores. Para a variável t será utilizado o valor 0 apenas para o cálculo dos pontos ótimos. Considerando o vetor de preços e de parâmetros teremos as seguintes variáveis ótimas médias como na tabela 1.

Estes valores servem como referência para o entendimento da função CES. Observe-se que quando os valores de \bar{y} e $\bar{\Pi}$ são menores que a unidade, quando γ aumenta (no caso acima de 0.8 para 0.9), ocorre uma redução do patamar do produto e do lucro; o oposto ocorre quando os valores são maiores que um.

Assim que ρ aumenta tem-se que o nível de produção, tudo o mais constante, diminui. Este fato apenas reproduz o comportamento da função, não necessariamente uma relação econômica pura, uma vez que A ou θ poderiam servir de fatores de ajuste da função.

Outra observação bem marcada é de que assim que α cresce na direção do insumo com o menor preço, representando uma maior participação do mesmo na produção, o nível de produção e de lucro crescem, como se observa ao passo que α cresce de 0.1 para 0.5 e 0.9, indo na direção da variável que tem o menor preço. no caso x_1 , com preço igual a 3, quando mais requisitado na produção do bem y aumenta a margem de lucro.

3.2 ESPECIFICAÇÃO DOS MODELOS DE ESTIMAÇÃO

Na busca de estimar a CES pelas formas primal e dual, primeiramente será mostrado um modelo que pode ser regredido por OLS, tendo como primeira fonte para este procedimento o artigo de Kmenta (1967). Posteriormente também será mostrado três modelos que serão regredidos por NLLS, de acordo com o estimador Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963).

3.2.1 Modelos por expansão de Taylor truncada

Desde a primeira vez que a CES-ACMS apareceu (ARROW et al., 1961) muitos trabalhos surgiram tendo em vista a estimação econométrica da mesma. Um trabalho pioneiro é o de Kmenta (1967), que desenvolveu através de uma série de Taylor truncada um modelo de regressão exequível em OLS. Derivando de forma semelhante ao que Kmenta (1967) fez, os autores Henningsen e G.Henningsen (2011) nos auxiliam com o modelo primal da função que será utilizada (2.13). Outrossim, o resultado obtido nesta modelagem representa o problema primal, definido da seguinte forma:

$$\ln y \approx \ln A + \theta t + \gamma \alpha \ln x_1 + \gamma(1 - \alpha) \ln x_2 - \frac{\gamma \alpha(1 - \alpha)\rho}{2} (\ln x_1 - \ln x_2)^2 \quad (3.1)$$

Com esta informação seria possível montar um modelo econométrico, que uma vez estimado fornecerá informação suficiente para recuperar os parâmetros da CES.

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln x_1 + \beta_3 \ln x_2 + \beta_4 (\ln x_1 - \ln x_2)^2 + \epsilon \quad (3.2)$$

Comparando a aproximação de Henningsen e G.Henningsen (2011) com o modelo

econométrico, a recuperação dos parâmetros da CES se daria por:

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= e^{\beta_0} \\
 \hat{\gamma} &= \beta_2 + \beta_3 \\
 \hat{\theta} &= \beta_1 \\
 \hat{\alpha} &= \frac{\beta_2}{\beta_2 + \beta_3} \\
 \hat{\rho} &= \frac{-2\beta_4(\beta_2 + \beta_3)}{\beta_2 \beta_3}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tendo já a regressão na forma primal, estamos interessados, também, em uma primeira estratégia de estimação da função CES usando variáveis duais. Uma vez que a função lucro incorreria na soma de três funções não lineares (2.25), (2.26) e (2.27), o trato da mesma se mostrou infrutífero, uma vez que não se mostrou possível isolar as variáveis independentes do modelo. A esta impossibilidade nos referimos ao fato de a expansão de Taylor de primeira ordem para a função de Lucro em torno de ρ tendendo a zero ser igual, também, a zero. Tendo em vista que parte da dualidade se pauta na substituição das variáveis independentes primais por variáveis duais, optou-se por utilizar o nível de produção e descrevê-la pelas variáveis duais como na equação (2.27).

A fim de se obter um modelo econométrico tratável por OLS, a estratégia utilizada será uma expansão de Taylor truncada, de forma semelhante ao artigo de Kmenta (1967). Mesmo que de acordo com Thursby e Lovell (1978), Corbo (1977) este procedimento seja problemático, é um mecanismo de se tratar a CES de forma linear.

Agrupando os termos semelhantes, (2.27) pode ser reescrita como,

$$y = \left(A e^{\theta t} (p\gamma)^\gamma \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\frac{\alpha^{\frac{1-\rho-\gamma}{1-\gamma}} \omega_1^{\frac{\rho}{1-\gamma}}}{\left(\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\gamma-1}}} + \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-\rho-\gamma}{1-\gamma}} \omega_2^{\frac{\rho}{1-\gamma}}}{\left((1-\alpha) + \alpha \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} \right)^{\frac{\gamma+\rho}{\gamma-1}}} \right)^{\frac{-\gamma}{\rho}}. \tag{3.4}$$

Seguindo a estratégia de estimação proposta, primeiramente aplicamos logaritmo natural em ambos os lados da igualdade,

$$\ln y = \frac{1}{1-\gamma} (\ln A + \theta t + \gamma (\ln \gamma + \ln p) - \frac{\gamma}{\rho} \ln(g(\rho))), \tag{3.5}$$

onde $g(\rho)$ denota a grande expressão de (3.4) entre parênteses.

A ideia é considerarmos a expansão de Taylor de primeira ordem de $h(\cdot) = -\gamma g(\cdot)/\rho$ em torno de $\bar{\rho}$ tendendo a zero. Assim, por Ribeiro e Karas (2013, Teorema 1.54) ,

$$\begin{aligned}
 h(\rho) &= h(\bar{\rho}) + h'(\bar{\rho})(\rho - \bar{\rho}) + r(\rho) \\
 &= -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) + \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} (\rho - \bar{\rho}) + r(\rho),
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\lim_{\rho \rightarrow \bar{\rho}} \frac{r(\rho)}{\|\rho - \bar{\rho}\|} = 0$. Vamos calcular, inicialmente, o valor da primeira parcela quando $\bar{\rho} \rightarrow 0$. Como

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} g(\bar{\rho}) = 1, \quad (3.7)$$

o limite que desejamos calcular nos leva a uma indeterminação, que nos permite aplicar o Teorema de L'Hospital, como segue,

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) = \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\gamma \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})}. \quad (3.8)$$

A função g é o quociente de funções que envolvem exponenciais em ρ . O numerador é o produto de duas exponenciais, enquanto o denominador é a composta de duas exponenciais. Logo a derivada de g é dada por

$$\begin{aligned} g'(\bar{\rho}) = & \frac{\alpha^{\frac{1-\bar{\rho}-\gamma}{1-\gamma}} \omega_1^{\frac{\bar{\rho}}{1-\gamma}} \left(-\ln(\alpha) + \ln(\omega_1) + \ln(\psi(\bar{\rho})) + (\gamma + \bar{\rho}) \frac{\psi'(\bar{\rho})}{\psi(\bar{\rho})} \right)}{(1-\gamma)(\psi(\bar{\rho}))^{\frac{\gamma+\bar{\rho}}{\gamma-1}}} + \\ & + \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-\bar{\rho}-\gamma}{1-\gamma}} \omega_2^{\frac{\bar{\rho}}{1-\gamma}} \left(-\ln(1-\alpha) + \ln(\omega_2) + \ln(\xi(\bar{\rho})) + (\gamma + \bar{\rho}) \frac{\xi'(\bar{\rho})}{\xi(\bar{\rho})} \right)}{(1-\gamma)(\xi(\bar{\rho}))^{\frac{\gamma+\bar{\rho}}{\gamma-1}}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\rho}) &= \alpha + (1-\alpha) \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}}, \\ \xi(\bar{\rho}) &= 1-\alpha + \alpha \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{-\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}}, \\ \psi'(\bar{\rho}) &= \frac{1-\alpha}{(\bar{\rho}+1)^2} \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}} \ln \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right), \\ \xi'(\bar{\rho}) &= \frac{-\alpha}{(\bar{\rho}+1)^2} \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right)^{\frac{-\bar{\rho}}{\bar{\rho}+1}} \ln \left(\frac{\omega_2 \alpha}{\omega_1 (1-\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $\bar{\rho} \rightarrow 0$ e usando, juntamente com (3.7), em (3.8), tem-se:

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} -\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) = \frac{\gamma}{\gamma-1} (\alpha \ln(\omega_1) + (1-\alpha) \ln(\omega_2) - \alpha \ln(\alpha) - (1-\alpha) \ln(1-\alpha)). \quad (3.10)$$

Vamos agora calcular a segunda parcela de (3.6). Assim,

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} = \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})) - \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})} \right),$$

que, por (3.8), recai em uma indeterminação, o que por sua vez nos permite usar, novamente, a regra de L'Hospital. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{d(-\frac{\gamma}{\bar{\rho}} \ln(g(\bar{\rho})))}{d\rho} &= \gamma \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{\ln(g(\bar{\rho})) - \bar{\rho} \frac{g'(\bar{\rho})}{g(\bar{\rho})}}{\bar{\rho}^2} \\ &= \lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0} \frac{-\gamma}{2} \frac{g''(\bar{\rho})g(\bar{\rho}) - (g'(\bar{\rho}))^2}{(g(\bar{\rho}))^2}. \end{aligned}$$

Como a expressão acima tornou-se intratável manualmente, obtivemos diretamente a aproximação de Taylor de primeira ordem de h com o uso do software Maple. Com ela, (3.5) é escrita como

$$\begin{aligned} \ln y = & \frac{\ln A}{1-\gamma} + \frac{\theta t}{1-\gamma} + \frac{\gamma \ln \gamma}{1-\gamma} + \frac{\gamma \ln p}{1-\gamma} - \frac{\alpha \gamma}{1-\gamma} \ln \omega_1 - \frac{(1-\alpha)\gamma}{1-\gamma} \ln \omega_2 + \frac{\alpha \gamma \ln \alpha}{1-\gamma} + \\ & + \frac{(1-\alpha)\gamma \ln(1-\alpha)}{1-\gamma} - \frac{\alpha(1-\alpha)\gamma \rho}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha) - (\ln \omega_1 - \ln \omega_2))^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A partir desta expressão, construímos a regressão, uma vez que teremos a correspondência teórica pertinente para cada um dos coeficientes a serem estimados com

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln(p) + \beta_3 \ln(\omega_1) + \beta_4 \ln(\omega_2) + \beta_5 (\ln(\omega_1) - \ln(\omega_2))^2 + \varepsilon. \quad (3.12)$$

Desenvolvendo o produto notável do último termo de (3.11), juntando os termos semelhantes e comparando com (3.12), segue que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{1}{1-\gamma} \left(\ln A + \gamma \ln \gamma + \gamma \alpha \ln(\alpha) + \gamma(1-\alpha) \ln(1-\alpha) - \frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha))^2 \right) \\ \beta_1 = \frac{\theta}{1-\gamma} \\ \beta_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma} \\ \beta_3 = -\frac{\gamma \alpha}{1-\gamma} + \frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{1-\gamma} \ln \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \\ \beta_4 = -\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma} - \frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{1-\gamma} \ln \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \\ \beta_5 = -\frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{2(1-\gamma)}. \end{array} \right.$$

Da expressão de β_2 , calcula-se o coeficiente γ . A partir de γ e da expressão de β_1 , é possível calcular θ , obtendo-se

$$\hat{\gamma} = \frac{\beta_2}{1 + \beta_2}, \quad \hat{\theta} = \frac{\beta_1}{(1 - \hat{\gamma})}.$$

O parâmetro α não pode ser isolado das expressões de β_3 e β_4 , porém tendo em vista que para valores de ρ que não se distancie muito de zero, uma medida simplificadora para uma primeira estimativa deste parâmetro se daria por:

$$\hat{\alpha} = -\frac{\beta_3 - \beta_4 - \beta_2}{2\beta_2}.$$

Como nem sempre podemos contar com esta medida simplificadora, utilizou-se neste trabalho uma aproximação obtida pelo método de Newton-Raphson para o cálculo de α .

Fixando, $\hat{\alpha} \in (0, 1)$, da expressão de β_5 , obtém-se:

$$\hat{\rho} = \frac{-2\beta_5(1 - \hat{\gamma})}{\hat{\gamma}\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})}.$$

E finalmente, da expressão de β_0 , tem-se

$$A = e^{\beta_0(1-\gamma) - \left(\gamma \ln \gamma + \gamma \alpha \ln(\alpha) + \gamma(1-\alpha) \ln(1-\alpha) - \frac{\gamma \rho \alpha(1-\alpha)}{2(1-\gamma)} (\ln \alpha - \ln(1-\alpha))^2 \right)}.$$

Cabe ressaltar que como foi usada uma aproximação linear de h em torno de $\bar{\rho}$ tendendo a zero, a regressão poderá não funcionar para ρ longe de zero. Além disso, a cada coeficiente que recuperamos utilizamos mais parâmetros que foram estimados, podendo incorrer em acúmulo de erros numéricos.

3.2.2 Modelos NLLS por Levenberg-Marquardt

O método dos mínimos quadrados não lineares, de forma análoga ao OLS, parte da minimização dos quadrados dos erros. Todavia o mecanismo de se obter as estimativas dos parâmetros muda consideravelmente. Preliminarmente os modelos partem de uma função h especificada apenas pelos dados como $y_i = h(\mathbf{x}_i)$; assim como de uma função de aproximação H que leva em consideração os parâmetros a serem estimados $\hat{y}_i = H(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{x}_i)$. Desta forma os resíduos podem ser definidos por uma função r tal que:

$$r_i(\boldsymbol{\nu}) = h(y_i, \mathbf{x}_i) = \epsilon_i - H(\boldsymbol{\nu}, y_i, \mathbf{x}_i). \quad (3.13)$$

O objetivo então é minimizar o somatório dos quadrados destes resíduos definido por:

$$s(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{i=1}^n r_i^2(\boldsymbol{\nu}). \quad (3.14)$$

Em seu artigo seminal, Levenberg (1944) aproxima a função r através de uma expansão de Taylor de primeira ordem utilizando-se de um conjunto inicial $\boldsymbol{\nu}_0$ para os parâmetros a serem estimados. Desta forma uma primeira aproximação local do problema de minimização dos resíduos é gerada. Para expandir o poder de convergência, Levenberg (1944) utiliza o gradiente de s em conjunto com os incrementos $\Delta\boldsymbol{\nu}$. Com as primeiras aproximações obtidas deste procedimento, repete-se o problema com estes novos valores até a convergência.

Tanto o método utilizando apenas a expansão de Taylor ou o método do gradiente foram considerados problemáticos. A expansão de Taylor por causa da divergência de resultados entre iterações e o método do gradiente por ter uma convergência bastante demorada depois das primeiras iterações (MARQUARDT, 1963). A relação de direção de minimização ou do tamanho do passo para a minimização não seriam escolhidas simultaneamente; tendo em vista a predileção da direção ou passo que Marquardt (1963) utilizando ambos os métodos. Uma vez que tanto Levenberg quanto Marquardt não se utilizaram puramente de apenas um ou outro método é que se conhece esta mistura de métodos como estimador Levenberg-Marquardt.

Para o NLLS Levenberg-Marquardt serão utilizados três modelos, sendo um primal e dois duais. O modelo primal terá a função (2.13) como a função de aproximação, assim como para comparar com o modelo dual exposto na seção anterior será utilizada a função (2.27); por último será utilizada a função lucro $\Pi(p, \boldsymbol{\omega})$

$$\Pi(p, \boldsymbol{\omega}) = py(p, \boldsymbol{\omega}) - \omega_1 x_1(p, \boldsymbol{\omega}) - \omega_2 x_2(p, \boldsymbol{\omega}). \quad (3.15)$$

Desta forma será possível tanto a análise de viés entre os parâmetros obtidos de forma primal e dual, como também para diferentes especificações da forma dual.

3.2.3 Especificação estocástica dos modelos

Uma das considerações iniciais deste tópico está centrada na ideia de que se deve continuar com valores não negativos para as variáveis utilizadas, uma vez que teoricamente nenhuma variável construída até agora obteve valores menores que zero. Das três especificações de erros que serão mostradas, cada uma tem uma forma diferente de ser trabalhada para evitar os valores negativos. Semelhante como apresentado por Just e Pope (1978), são os três modelos mais comuns:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= f(X) e^\varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) = 0 \\ \mathbf{y} &= f(X) \varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) = 1 \\ \mathbf{y} &= f(X) + \varepsilon & \text{com } E(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Basicamente temos duas fórmulas com erros multiplicativos e uma com erros aditivos. As duas formas multiplicativas acabam por serem mais manejáveis quando se trata de evitar valores negativos para as variáveis que se utiliza neste trabalho. Isto se deve ao fato de que a esperança do termo que multiplicará por $f(X)$ ser 1 (no caso de e^ε teremos que a esperança é dada por $e^0 = 1$), uma vez que os desvios em torno da média representariam variações percentuais na quantidade produzida. No caso do termo de erro aditivo a representação gira em torno do quantum produzido. No formato aditivo o desvio padrão deve ser pequeno o suficiente para que nenhum valor seja negativo.

Duas contrapartidas para os modelos multiplicativos e aditivos são os modelos gerais de erro (KUMBHAKAR; TSIONAS, 2011), sendo especificados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= f(x_1 - \varepsilon_1, x_2 - \varepsilon_2, \dots, x_j - \varepsilon_j) & \text{com } E(\varepsilon_i) = 0 \quad \forall i \in [1, j] \\ \mathbf{y} &= f(x_1 \varepsilon_1, x_2 \varepsilon_2, \dots, x_j \varepsilon_j) & \text{com } E(\varepsilon_i) = 1 \quad \forall i \in [1, j]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Utilizando-se das duas formas de erros gerais, podemos adaptar isto para o caso em que também a quantidade de insumos consumida sofre distúrbios. Com erros adicionados nas demandas por insumo, Lusk et al. (2002) mostra que a própria noção de dualidade terá resultados inconsistentes, uma vez que estes erros da percepção (seja do produtor, como do economista) da demanda por insumos pode ser interpretada como erros de medida. Utilizando-se da Cobb-Douglas, os autores Bittencourt e Sampaio (2011) mostram que, uma vez que existam erros estocásticos na demanda por insumos a estimativa dos parâmetros pela forma dual detém um viés menor que a forma primal.

Destarte, tentaremos abranger a análise da Cobb-Douglas para a função CES, mostrando como as estimativas dos parâmetros é prejudicada entre as formas primal e dual, considerando a existência de erros da aplicação dos insumos, assim como de erros no nível de produção.

Primeiramente os modelos primal e dual utilizando a linearização por uma expansão de Taylor serão regredidos por OLS. Nestes modelos, apenas as quantidades consumidas de insumos e de produto final sofrerão distúrbios, uma vez que pode ser proveniente tanto de ineficiência alocativa dos insumos, como de erros de medida por parte do economista ou erro de base

amostral. Assim teremos as variáveis com distúrbios para os modelos rodados por OLS dadas por:

$$\begin{aligned} y_{ols}(\varepsilon_y) &= ye^{\varepsilon_y} \\ x_{1ols}(\varepsilon_1) &= x_1e^{\varepsilon_1} \\ x_{2ols}(\varepsilon_2) &= x_2e^{\varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tanto ε_y , ε_1 como ε_2 serão normalmente distribuídas e independentes, todas com média 0 e desvio padrão de 0.04. O valor do desvio padrão foi escolhido de tal forma que, mesmo que se utilize 5 desvios-padrão teríamos, por exemplo, no caso de y que:

$$\begin{aligned} y_{ols}(-0.2) &= ye^{-0.2} \Rightarrow y_{ols} = y0.8187 \\ y_{ols}(0.2) &= ye^{0.2} \Rightarrow y_{ols} = y1.2214. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Desta forma é bastante pouco provável que as variáveis (y, x_1, x_2) acabem sendo utilizadas em valores menores que 81.87% do ponto ótimo ou 122.14% acima. Utilizando-se do logaritmo natural teremos:

$$\begin{aligned} \ln y_{ols}(\varepsilon_y) &= \ln y + \varepsilon_y \\ \ln x_{1ols}(\varepsilon_1) &= \ln x_1 + \varepsilon_1 \\ \ln x_{2ols}(\varepsilon_2) &= \ln x_2 + \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A construção dos modelos primal e dual serão construídas com estes erros nos modelos (3.2) e (3.12), reescritos como:

$$\begin{aligned} \ln y(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_y) &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln x_1(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_1) + \beta_3 \ln x_2(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_2) + \\ &+ \beta_4 (\ln x_1(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_1) - \ln x_2(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_{kp}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\ln y(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_y) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln p + \beta_3 \ln \omega_1 + \beta_4 \ln \omega_2 + \beta_5 (\ln \omega_1 - \ln \omega_2)^2 + \varepsilon_{kd}. \quad (3.22)$$

Utilizando-se das formas aditivas e multiplicativas, tanto do erro apenas considerado na variável dependente como dos modelos de erros gerais, a construção dos dados para as regressões NLLS utilizando o estimador Levenberg-Marquardt serão:

$$\begin{aligned} \Pi_{lmm}(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_y) &= \Pi \varepsilon_\Pi, & \Pi_{lma}(p, \omega, t, \nu, \vartheta_y) &= \Pi + \vartheta_\Pi \\ y_{lmm}(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_y) &= y \varepsilon_y, & y_{lma}(p, \omega, t, \nu, \vartheta_y) &= y + \vartheta_y \\ x_{1lmm}(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_1) &= x_1 \varepsilon_1, & x_{1lma}(p, \omega, t, \nu, \vartheta_1) &= x_1 + \vartheta_1 \\ x_{2lmm}(p, \omega, t, \nu, \varepsilon_2) &= x_2 \varepsilon_2, & x_{2lma}(p, \omega, t, \nu, \vartheta_2) &= x_2 + \vartheta_2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os distúrbios multiplicativos que serão utilizados no Levenberg-Marquardt serão distribuídos normalmente, tais quais os erros dos modelos primal e dual de Kmenta. Os distúrbios ϑ são distribuídos normalmente tal que $\vartheta_Z \sim N(0, \frac{\min\{Z\}}{8})$. Esta regra foi construída para fazer com que nenhum valor das variáveis utilizadas se torne negativo, uma vez que ao considerar-se o menor valor como referência para o desvio padrão e dividindo o mesmo por 8, descartamos

qualquer possibilidade do distúrbio tornar algum valor menor que zero; isto decorre dos limites máximos que o algoritmo pseudo-aleatório de geração de dados é capaz de gerar para dado desvio-padrão.

4 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Os modelos especificados no capítulo anterior, representados pelas formas descritas em 3.20 e 3.23 foram reproduzidos no R por 10000 vezes para cada conjunto de parâmetros. Desta forma foram obtidas as médias dos parâmetros recuperados como consta nas tabelas do apêndice, assim como a variância destes dados. A consistência destas estimativas pode ser analisada até um certo limite, uma vez que a maior amostra de dados que utilizamos por regressão era composta por 500 amostras. Com exceção dos parâmetros γ e θ , que foram estimados com grande qualidade, os demais dependem em grande medida da natureza inicial dos valores das variáveis e, logicamente, também dos erros.

Vale ressaltar para fins de identificação nos gráficos que os modelos de Kmenta primal e dual serão respectivamente denominados por KP e KD. Os modelos por Levenber-Marquardt primal e dual serão representados pelas respectivamente por LMP e LMD; quando nos referirmos aos modelos por Levenber-Marquardt duais sempre que utilizarmos a função de produção acrescentaremos Y e ao utilizarmos a função lucro acrescentaremos L, ficando assim LMDY e LMDL. Por fim, dependendo do termo de erro utilizado nos modelos Levenberg-Marquardt, sejam na forma aditiva ou multiplicativa acrescentaremos respectivamente A ou M no final da sigla. Desta forma, teríamos por exemplo que a sigla LMDLM significaria um modelo rodado por Levenberg-Marquardt dual, utilizando-se da função Lucro com erros multiplicativos.

Quando os valores de α são 0.1 ou 0.5 temos que os valores dos insumos consumidos, produto e lucro ficam abaixo da unidade, com exceção da combinação $\alpha = 0.5$, $\rho = -0.5$. Desta forma os erros aplicados de forma aditiva nos modelos NLLS acabam se aproximando também bastante de zero, uma vez que os distúrbios foram produzidos como uma fração dos menores valores destas séries de dados como medida de desvio-padrão. O resultado destes distúrbios tão próximos de zero nestas formas apresentaram uma convergência quase imediata para os três modelos NLLS com erros aditivos, mesmo em pequenas amostras. Uma conclusão preliminar deste fato é de que amostras com perturbações mínimas em relação ao ponto ótimo poderiam ser regredidas pelo método de Levenberg-Marquardt sem maiores complicações. Portanto, deve-se ter em conta que tais bases de dados se pautariam em valores muito próximos de zero, com distúrbios ainda menores em relação aos valores ótimos das variáveis. Outrossim, as análises mais pertinentes dos modelos com erros aditivos serão aquelas em que o conjunto de dados contenha $\alpha = 0.9$.

Os conjunto de dados que tem $\alpha = 0.9$ obtiveram os maiores valores para as variáveis (x_1, x_2, y, Π) , desta forma também os distúrbios aplicados de acordo com as equações em (3.20) e (3.23) seriam maiores em magnitude. Desta forma fica perceptível nas regressões por NLLS, utilizando o algoritmo Levenberg-Marquardt, que os resultados de pequenas amostras, com $N = 50$, tiveram bastante discrepância, inclusive nos modelos com erros aditivos, com grandes vieses nos parâmetros (A, α, ρ) .

Por exemplo, mesmo que alguns destes valores tendam a convergir em alguma medida para o valor original na média, os gráficos abaixo demonstram que as estimativas dos parâmetros

α, ρ são problemáticas, muitas vezes com dois picos de concentração dos valores obtidos, sendo estes picos, em alguns casos, opostos entre si em relação ao valor original.

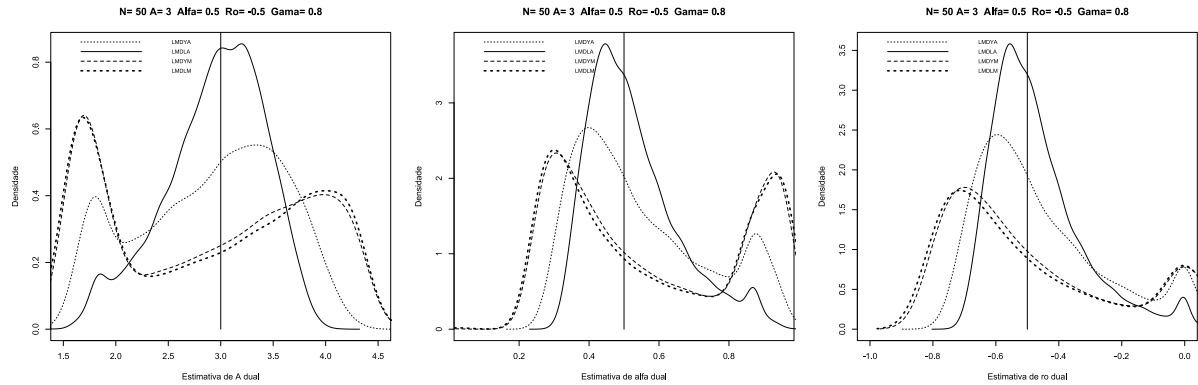


Figura 2 – Estimativas de A, α, ρ nos modelos duais por Levenberg-Marquardt com $N=50$

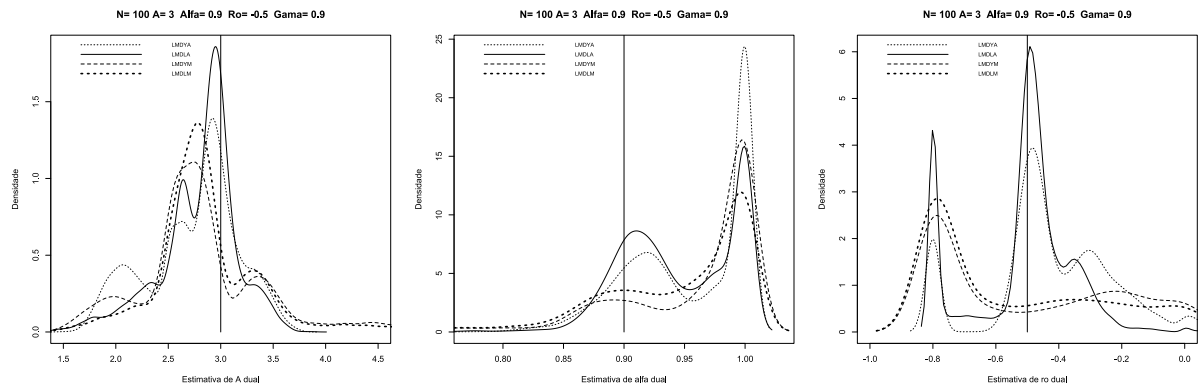


Figura 3 – Estimativas de A, α, ρ nos modelos duais por Levenberg-Marquardt com $N=100$

Também, ainda com $\alpha = 0.9$ e $\rho = -0.5$ os modelos primais regredidos por NLLS falham em alcançar os parâmetros estimados, mesmo com $N = 500$. Observe-se que o modelo com erros aditivos tem estimativas bastante ruins quando $\gamma = 0.8$ e o modelo com erros multiplicativos com $\gamma = 0.9$. Ainda nesta seara os modelos regredidos por OLS não desempenham resultados melhores. O modelo primal, neste caso, chega a ter resultados como $\alpha > 1$ e a estimativa de A chegando a ter 6 dígitos antes da vírgula. A variância nos modelos OLS para as estimativas de ρ sobretudo persistem a valores absurdos mesmo em grandes amostras. O modelo primal de Kmenta para os valores $\alpha = 0.9, \rho = 0.5, \gamma = 0.8$ piora de acordo com o aumento da amostra, levando também a valores incongruentes com a teoria apresentada no capítulo 2, oferecendo um $\rho = -18.7332$.

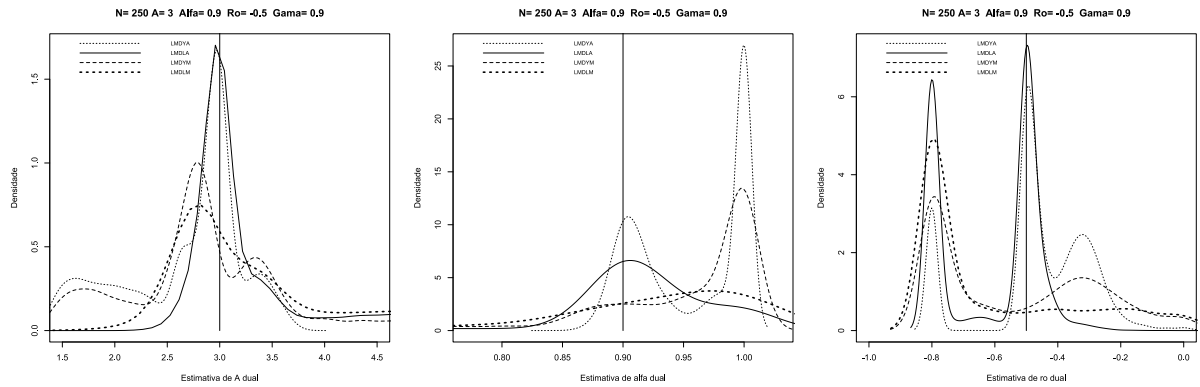


Figura 4 – Estimativas de A , α , ρ nos modelos duais por Levenberg-Marquardt com $N=250$

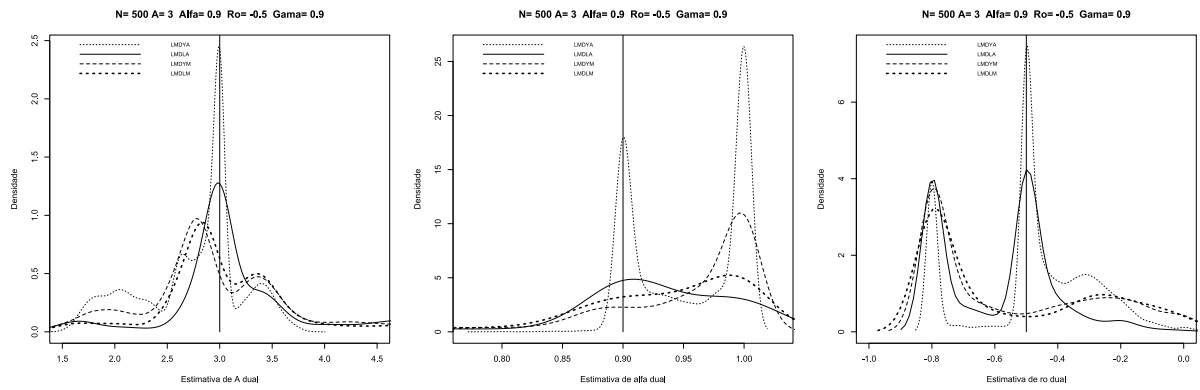


Figura 5 – Estimativas de A , α , ρ nos modelos duais por Levenberg-Marquardt com $N=500$

Outro comportamento problemático tanto no modelo primal na forma de Kmenta, como no problema dual, é a relação da estimativa de α . De acordo com que ρ se distancia da origem os valores estimados de α tendem a se afastar gradativamente do valor original. No caso em que $\alpha = 0.1$ podemos ver este comportamento bem patente para o caso primal, como mostra a figura 6. Já para o problema dual podemos ver o mesmo comportamento em direção oposta para $\alpha = 0.5$ como na figura 7

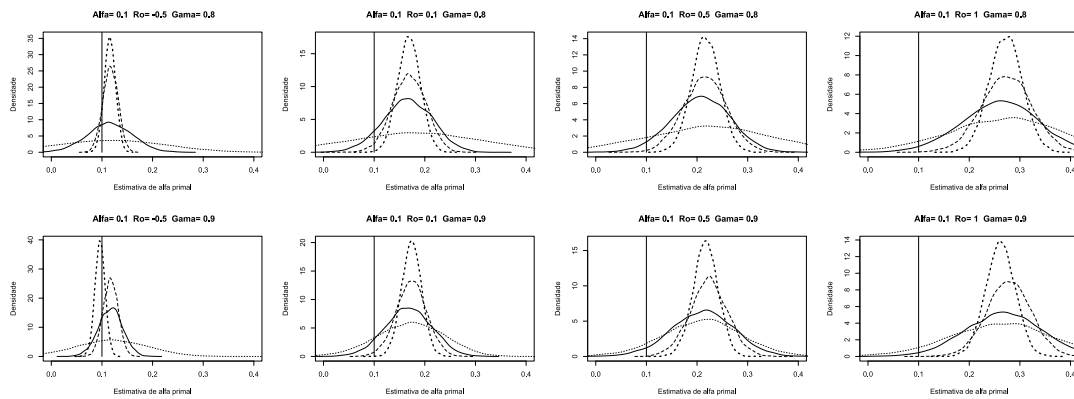


Figura 6 – Estimativas de α primal por Kmenta com α original igual a 0.1

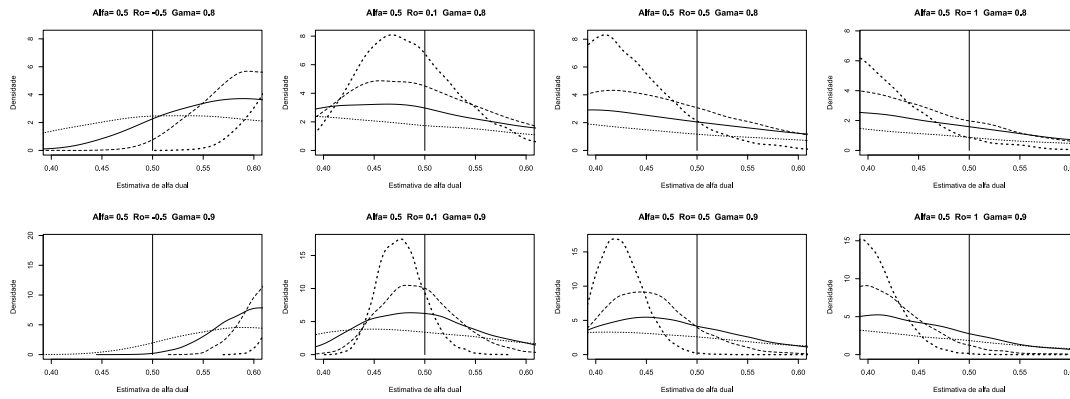


Figura 7 – Estimativas de α dual por Kmenta com α original igual a 0.5

Seguindo os trabalhos que mostram que o método de Kmenta (1967) é problemático para as estimativas de ρ (CORBO, 1977; THURSBY; LOVELL, 1978; THURSBY, 1980) devido à inconsistência do estimador, por ser uma série truncada ao redor de ρ tendendo a zero, obtém-se neste caso com erros estocásticos na demanda por insumos também uma inconsistência na estimação do parâmetro α , conforme seria esperado tendo em vista o trabalho de Bittencourt e Sampaio (2011). Porém, como o mesmo também ocorre com o α dual, uma análise de qual fator explica este comportamento, majoritariamente, do parâmetro alfa, tanto na forma primal como na forma dual necessitaria de um estudo direcionado apenas à aproximação de Kmenta em relação a este parâmetro.

Uma hipótese que poderia ser levantada é de que, uma vez que na forma primal se trabalha com as quantidades consumidas dos insumos, o movimento da estimativa do parâmetro alfa crescer, conforme ρ cresce, pode indicar que a função, então se aproximando cada vez mais de uma Leontief (quando ρ tende ao infinito) favoreça o bem mais abundante, tentando estabelecer um valor de alfa para bens complementares condizentes com os dados. De forma análoga, o movimento das curvas de densidade para o alfa dual caminha para a esquerda quando o valor original é 0.5. Outra forma de compensação parece existir na forma dual, buscando explicar o parâmetro através do preço mais alto.

Sobre as estimativas de ρ , na maior parte das estimativas para os modelos na aproximação de Kmenta apresentam a diminuição do viés ao passo que se aumenta a amostra. No caso da versão dual do modelo de Kmenta o modelo estimado para os valores $\alpha = 0.9$, $\rho = (0.5, 1)$ obteve valores de viés e variância explosivos, chegando a um viés mais de 400 vezes maior que a própria medida em um dos casos. O caso com o maior viés para a estimação primal é no conjunto de dados $\alpha = 0.9$, $\rho = 0.5$, $\gamma = 0.9$ chegando a ser mais de 200 vezes maior que o próprio parâmetro. O comportamento da estimativa de ρ do modelo primal é mais variável no que se refere ao viés, já o modelo dual demonstra uma variância maior entre os valores estimados.

No que se refere às estimativas sobre o tema da dualidade, o desempenho sensivelmente melhor do modelo de Kmenta dual em relação ao Kmenta primal não é suficiente para garantir o desempenho de uma ou outra forma, devido à inconsistência natural deste método à priori.

Por parte dos estimadores NLLS há sim uma melhor estimação por parte de ambos os modelos duais, em ambos os padrões de erro (aditivo e multiplicativo) em relação às suas

contrapartidas primais. Havendo erros aditivos pequenos a vantagem dos modelos duais é singela, envolvendo uma maior convergência da estimativa dos parâmetros na média, sobretudo no que se refere a ρ .

No caso de α percebe-se os dois montes com $N = 50$, $\gamma = 0.8$, onde um deles até está bastante próximo do parâmetro original, mas de acordo com que a amostra cresce, identifica-se apenas um monte que se torna mais distante do valor original do parâmetro α . Já por parte dos modelos duais a convergência aparenta ocorrer por causa de uma cauda bastante alta à esquerda. O formato bastante marcado da densidade dos rês obtidos para o modelo primal decorre de existir alguns outliers, prejudicando o funcionamento devido do algoritmo, trazendo uma variância bastante alta.

Com os mesmos parâmetros, alterando apenas γ para 0.9, observa-se que o modelo primal indica uma convergência maior para os parâmetros para grandes amostras, todavia mais uma vez o funcionamento do algoritmo foi prejudicado pela existência de outliers, o que não ocorre com os modelos duais. Já nos modelos com termos multiplicativos os dados das tabelas dos anexos para $\alpha = 0.9$ demonstram que, mesmo que a distribuição não seja perfeita dos modelos duais, a vantagem em termos de proximidade do parâmetro original destes modelos é bastante melhor que do modelo primal.

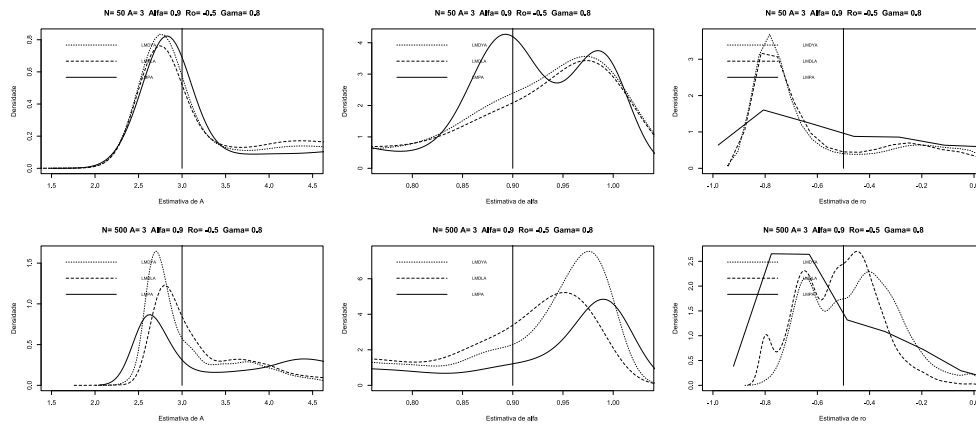


Figura 8 – Estimativas primal e dual com erros aditivos

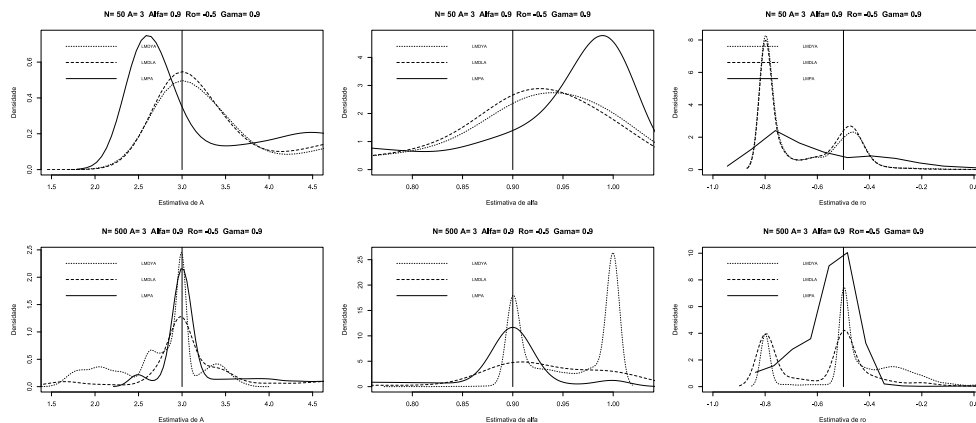


Figura 9 – Estimativas primal e dual com erros aditivos

CONCLUSÃO

Buscou-se neste trabalho primeiramente dar fundamento matemático suficiente para que a obra tivesse as principais demandas supridas neste aspecto. A construção de resultados importantes sobre conjuntos e concavidade de funções resolveram muitos dos problemas enfrentados na solução das condições preliminares para a solução do problema de maximização de lucro. Desta forma demonstrar a concavidade da função CES, sobretudo quando se incorpora o termo γ de escala desempenhou passo fundamental, sobre o qual foi erigido o lagrangeano da função lucro tendo-se como restrição a função de produção côncava. A noção de ser capaz descrever uma tecnologia qualquer de uma função de produção por um outro formato mostrou-se pertinente teoricamente, mesmo que a não-linearidade desta função leve às mesmas complexidades que da função original.

Na construção da simulação foram expostos conhecimentos necessários para a construção dos dados iniciais partido de variáveis uniformemente variáveis, que foram aplicados para a construção do vetor de preços para as simulações. Através deste primeiro vetor de preços, gerou-se as outras variáveis do modelo de maximização de lucro. A construção dos modelos econométricos, cada um a sua maneira, necessitou de diferentes especificação estocástica, onde de forma semelhante a Bittencourt e Sampaio (2011) construímos a demanda por insumos também com distúrbios, uma vez que o econometrista não tem pleno acesso a todos os fatores decisórios do emprego de insumos.

Ainda no que se refere aos modelos, utilizou-se a aproximação inicial de Kmenta (1967) para fazer um modelo dual exequível em OLS. Devido ao tratamento dificultoso por parte da função lucro, optou-se por utilizar o nível de produção, sob a prerrogativa de que a troca de variáveis independentes já seria suficiente para se manter uma segunda forma de trabalhar com os parâmetros da CES. Também repetiu-se a utilização do método de Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963) para os modelos NLLS para o modelo primal como em Thursby e Lovell (1978), Thursby (1980), Kumar e Gapinski (1974), buscando-se expandir também o modelo dual.

Os resultados mostraram que os modelos baseados na aproximação de Kmenta tiveram resultados bastante pobres dependendo da faixa dos parâmetros verdadeiros, tanto no modelo primal como no dual, salvaguardando uma maior eficiência e vieses menores para a estimação dual em uma quantidade maior de regressões. Os parâmetros γ , θ , A tiveram na maior parte das regressões resultados bastante satisfatórios, uma vez que tanto no que se refere ao viés como da consistência as estimativas são bastante próximas do valor original.

Nos casos de NLLS, duas especificações de erros estocásticos distintas foram analisadas: uma aditiva e a outra multiplicativa. Devido à construção dos erros na forma aditiva, a maior parte das regressões tiveram convergência mesmo em pequenas amostras, o que vai ao encontro com a literatura que utilizou-se deste procedimento para regredir uma CES (THURSBY; LOVELL, 1978; THURSBY, 1980; KUMAR; GAPINSKI, 1974). Todavia esta convergência se torna mais sutil e problemática quando se trabalha com grandes números como no caso em que $\alpha = 0.9$.

Nesta faixa (quando $\alpha = 0.9$) observa-se que embora exista uma convergência de baixo viés por parte dos modelos duais, mostrando uma leve superioridade em relação ao método primal, a densidade de todos os parâmetros estimados mostram problemas. Em alguns casos dois picos bastante distintos do valor original mostram que os valores da vizinhança do parâmetro verdadeiro é que são obtidos frequentemente. Em outros casos grandes e altas caudas em apenas um dos lados da distribuição empírica fazem com que a convergência também ocorra, mesmo que o valor mais frequente seja bastante diferente do valor verdadeiro.

É importante ressaltar que este comportamento de dois montes na distribuição empírica dos parâmetros obtidos nas formas duais, para o caso dos modelos com erros multiplicativos, não invalidam a grande superioridade do modelo dual, uma vez que existem grandes vieses e uma quantidade considerável de resultados outliers nos casos primais.

De forma geral este trabalho corrobora com a literatura no que se refere à inconsistência maior dos modelos primais com a presença de erros estocásticos nas demandas por insumo (BITTENCOURT; SAMPAIO, 2011; LUSK et al., 2002; BROWN; WALKER, 1995; BERNDT, 1976), quando comparados aos modelos duais. Também indo de encontro a literatura sobre o método de Kmenta (1967), mostrou-se que a forma dual em relação à primal obteve resultados ligeiramente melhores, mas não o suficiente uma vez que a literatura mostra que a aproximação de Kmenta é enviesada à priori na construção baseada em uma expansão de Taylor truncada (KUMAR; GAPINSKI, 1974; CORBO, 1977; THURSBY; LOVELL, 1978; THURSBY, 1980). Por último a utilização de formas duais mostraram sensíveis vantagens em relação aos modelos primais no NLLS Levenberg-Marquardt no caso dos erros aditivos, já nos casos dos modelos NLLS com erros multiplicativos a vantagem das formas duais mostrou-se bastante superior. Em parte o trunfo deste trabalho dentro da literatura é levantar que mesmo existindo convergência por parte dos estimadores NLLS para a função CES, a distribuição empírica deve ser levada em conta, uma vez que parâmetros diferentes e opostos pela média são os responsáveis por tal convergência falsa.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, R. G. D. *Mathematical analysis for economists*. [S.l.]: Macmillan, 1938.
- ANTONY, J. A class of changing elasticity of substitution production functions. *Journal of Economics*, Springer, v. 100, n. 2, p. 165–183, 2010.
- ARROW, K. J. et al. Capital-labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, p. 225–250, 1961.
- BERNDT, E. R. Reconciling alternative estimates of the elasticity of substitution. *The Review of Economics and Statistics*, p. 59–68, 1976.
- BITTENCOURT, M.; SAMPAIO, A. Are dual and primal estimations equivalent in the presence of stochastic errors in input demand? *Brazilian Review of Econometrics*, v. 31, n. 2, p. 295–313, 2011.
- BLUME, C. S. L. *Mathematics for Economists*. New York: W. W. Norton & Company, 1994.
- BRANDIMARTE, P. *Handbook in Monte Carlo Simulation: applications in financial engineering, risk management, and economics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.
- BROWN, B. W.; WALKER, M. B. Stochastic specification in random production models of cost-minimizing firms. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 66, n. 1, p. 175–205, 1995.
- BURGESS, D. F. Duality theory and pitfalls in the specification of technologies. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 3, n. 2, p. 105–121, 1975.
- COBB, C. W.; DOUGLAS, P. H. A theory of production. *The American Economic Review*, v. 18, n. 1, p. 139–165, 1928.
- CORBO, V. A search procedure for least squares ces estimates: A monte-carlo study. *Southern Economic Journal*, p. 1466–1477, 1977.
- DEATON, A.; MUELLBAUER, J. *Economics and Consumer Behaviour*. [S.l.: s.n.], 1980.
- DIEWERT, W. Frontiers of quantitative economics. In: _____. [S.l.: s.n.], 1974. cap. Applications of Duality Theory, p. 106–176.
- DIEWERT, W. E. An application of the shephard duality theorem: a generalized leontief production function. *Journal of political Economy*, The University of Chicago Press, v. 79, n. 3, p. 481–507, 1971.
- DIEWERT, W. E. Duality approaches to microeconomic theory. *Handbook of mathematical economics*, Elsevier, v. 2, p. 535–599, 1982.
- GRANDVILLE, O. de L. In quest of the slusky diamond. *The American Economic Review*, p. 468–481, 1989.
- GREENE, W. H. *Econometric Analysis*. [S.l.]: Pearson Education, 2012.
- HENNINGSEN, A.; G.HENNINGSEN. Econometric estimation of the constant elasticity of substitution function in r: Package miceconces. 2011.
- HICKS, J. *The theory of wages*. [S.l.]: Springer, 1963.

- HIRIART-URRUTY, J.-B.; LEMARÉCHAL, C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- HOTELLING, H. Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 40, n. 5, p. 577–616, 1932.
- HOTELLING, H. Demand functions with limited budgets. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 66–78, 1935.
- JUST, R. E.; POPE, R. D. Stochastic specification of production functions and economic implications. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 67–86, 1978.
- KMENTA, J. On estimation of the ces production function. *International Economic Review*, v. 8, n. 2, p. 180–189, 1967.
- KUMAR, T. K.; GAPINSKI, J. H. Nonlinear estimation of the ces production parameters: a monte carlo study. *The Review of Economics and Statistics*, p. 563–567, 1974.
- KUMBHAKAR, S. C.; TSIONAS, E. G. Stochastic error specification in primal and dual production systems. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley Online Library, v. 26, n. 2, p. 270–297, 2011.
- LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944.
- LUSK, J. L. et al. Empirical properties of duality theory. *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*, p. 45–68, 2002.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, SIAM, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- MCFADDEN, D. Constant elasticity of substitution production functions. *The Review of Economic Studies*, v. 30, n. 2, p. 73–83, 1963.
- MILLER, E. *An assessment of CES and Cobb-Douglas production functions*. [S.l.]: Congressional Budget Office, 2008.
- PARIS, Q.; CAPUTO, M. The rhetoric of duality. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, p. 195–214, 1995.
- POPE, R. D. The generalized envelope theorem and price uncertainty. *International Economic Review*, p. 75–86, 1980.
- POPE, R. D. To dual or not to dual? *Western Journal of Agricultural Economics*, v. 7, n. 2, p. 337–351, 1982.
- REVANKAR, N. S. A class of variable elasticity of substitution production functions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, p. 61–71, 1971.
- RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Um curso de Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. [S.l.]: Hermann & cie, 1942. v. 930.
- RUUD, P. A. *An Introduction to Classical Econometric theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 2000.

SHEPHARD, R. W. *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton: Princeton University Press, 1953.

SHUMWAY, C. R. Recent duality contributions in production economics. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, p. 178–194, 1995.

THOMPSON, G. D.; LANGWORTHY, M. Profit function approximations and duality applications to agriculture. *American Journal of Agricultural Economics*, Oxford University Press, v. 71, n. 3, p. 791–798, 1989.

THURSBY, J. Alternative ces estimation techniques. *The Review of Economics and Statistics*, p. 295–299, 1980.

THURSBY, J. G.; LOVELL, C. K. An investigation of the kmenta approximation to the ces function. *International Economic Review*, p. 363–377, 1978.

UZAWA, H. Production functions with constant elasticities of substitution. *The Review of Economic Studies*, v. 29, n. 4, p. 291–299, 1962.

APÊNDICE

Tabela 2 – Resultados numéricos

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0229	0,1150	-2,1311	8,00E-01	9,97E-04	Média	3,0155	0,0918	1,4087	8,00E-01	9,55E-04
Variância	0,0207	0,0115	49164,5559	1,01E-04	2,67E-07	Variância	0,0360	0,0047	17,6070	2,70E-04	4,63E-07
Vies	0,0229	0,0150	-1,6311	-5,35E-05	-2,61E-06	Vies	0,0155	-0,0082	1,9087	-7,06E-05	-4,45E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0080	0,0983	-0,1181	8,00E-01	9,82E-04	Média	3,1353	0,1433	0,1370	8,00E-01	1,32E-03
Variância	0,0067	0,0020	1,2263	4,51E-05	4,96E-08	Variância	0,4122	0,0272	245,3232	3,10E-06	1,80E-07
Vies	0,0080	-0,0017	0,3819	3,75E-04	-1,84E-05	Vies	0,1353	0,0433	0,6370	-2,33E-05	3,16E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9899	0,0902	-0,0940	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,9748	0,0753	1,8055	8,00E-01	1,04E-03
Variância	0,0009	0,0008	1,7293	1,44E-06	2,55E-08	Variância	0,0022	0,0020	25,2890	8,22E-06	2,34E-07
Vies	-0,0101	-0,0098	0,4060	4,16E-06	9,94E-06	Vies	-0,0252	-0,0247	2,3055	7,78E-05	4,49E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9941	0,0946	-0,3279	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,9718	0,0778	1,4626	8,00E-01	1,08E-03
Variância	0,0005	0,0004	0,5695	8,96E-07	1,98E-09	Variância	0,0034	0,0020	16,6324	1,02E-05	4,85E-08
Vies	-0,0059	-0,0054	0,1721	-8,15E-06	7,17E-06	Vies	-0,0282	-0,0222	1,9626	1,17E-04	8,45E-05
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0370	0,1184	3,5092	9,01E-01	9,03E-04	Média	3,0379	0,1065	1,9783	9,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0163	0,0052	68847,0073	2,62E-05	3,25E-07	Variância	0,0874	0,0085	36,3548	3,14E-04	1,06E-06
Vies	0,0370	0,0184	4,0092	5,40E-04	-9,69E-05	Vies	0,0379	0,0065	2,4783	2,41E-04	2,71E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,1001	-0,4994	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0473	0,1018	0,1621	9,00E-01	1,76E-03
Variância	0,0000469	0,0000268	0,0094983	1,55E-07	2,28E-10	Variância	0,4115	0,0039	1611,3997	1,89E-07	1,80E-07
Vies	0,0000388	0,0000692	0,0006436	-8,73E-07	-2,46E-07	Vies	0,0473	0,0018	0,6621	-2,22E-05	7,65E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9998	0,0999	-0,4974	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9708	0,0774	0,5189	9,00E-01	1,08E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0019	1,96E-09	4,99E-11	Variância	0,0040	0,0016	4,3285	1,67E-05	3,79E-07
Vies	-0,0002	-0,0001	0,0026	-1,89E-06	-6,89E-08	Vies	-0,0292	-0,0226	1,0189	-2,40E-04	8,01E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9742	0,0976	-0,5014	8,98E-01	1,02E-03	Média	2,9604	0,0883	-0,2394	8,99E-01	1,23E-03
Variância	0,0294	0,0002	0,0258	2,01E-04	3,80E-08	Variância	0,0283	0,0011	0,4339	1,89E-04	2,01E-07
Vies	-0,0258	-0,0024	-0,0014	-2,01E-03	2,09E-05	Vies	-0,0396	-0,0117	0,2606	-1,49E-03	2,29E-04

Tabela 3 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50			Kmenta		Primal		Modelo		Mult	
Média	3,0591	0,1769	1,0523	8,01E-01	8,26E-04	Média	3,0706	0,1504	4,8634	8,02E-01	8,31E-04
Variância	0,0181	0,0195	1,18632,8625	9,51E-05	2,88E-07	Variância	0,0381	0,0120	166,2487	2,83E-04	4,40E-07
Viés	0,0591	0,0769	0,9523	1,50E-03	-1,74E-04	Viés	0,0706	0,0504	4,7634	2,25E-03	-1,69E-04
	N = 50			Aditivo		Dual		Modelo		Kmenta	
Média	3,0151	0,1093	1,8643	8,01E-01	9,53E-04	Média	3,3385	0,1730	2,1400	8,00E-01	1,41E-03
Variância	0,0059	0,0036	39,2913	4,76E-05	6,11E-08	Variância	89,8444	0,0367	1564,7007	3,04E-06	1,83E-07
Viés	0,0151	0,0093	1,7643	5,49E-04	-4,70E-05	Viés	0,3385	0,0730	2,0400	8,52E-06	4,11E-04
	N = 50			Aditivo		Dual Y		Modelo		Mult	
Média	2,9881	0,0817	2,4588	8,00E-01	1,06E-03	Média	2,9841	0,0800	7,9280	8,00E-01	1,11E-03
Variância	0,0007	0,0016	30,9914	1,48E-06	3,29E-08	Variância	0,0012	0,0047	407,2990	8,05E-06	2,14E-07
Viés	-0,0119	-0,0183	2,3588	1,70E-05	5,66E-05	Viés	-0,0159	-0,0200	7,8280	1,43E-04	1,06E-04
	N = 50			Dual II		Dual II		Modelo		Mult	
Média	2,9942	0,0916	0,5977	8,00E-01	1,03E-03	Média	2,9812	0,0827	3,4697	8,00E-01	1,18E-03
Variância	0,0004	0,0007	2,4174	9,26E-07	8,46E-09	Variância	0,0023	0,0022	62,0681	1,04E-05	1,25E-07
Viés	-0,0058	-0,0084	0,4977	2,44E-05	3,17E-05	Viés	-0,0188	-0,0173	3,3697	2,68E-04	1,75E-04
Verdadeiro	3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50			Kmenta		Primal		Modelo		Mult	
Média	3,0700	0,1706	0,3303	9,01E-01	4,75E-04	Média	3,0832	0,1414	6,3722	9,03E-01	8,23E-04
Variância	0,0154	0,0046	746,1357	2,51E-05	5,08E-07	Variância	0,0752	0,0119	266,3885	3,53E-04	1,03E-06
Viés	0,0700	0,0706	0,2303	1,25E-03	-5,25E-04	Viés	0,0832	0,0414	6,2722	3,43E-03	-1,77E-04
	N = 50			Aditivo		Dual		Modelo		Kmenta	
Média	3,0001	0,1001	0,0949	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1929	0,1226	2,0003	9,00E-01	1,90E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0459	1,41E-07	6,50E-10	Variância	6,9077	0,0149	1219,6170	1,91E-07	1,81E-07
Viés	0,0001	0,0001	-0,0051	6,72E-06	-3,85E-07	Viés	0,1929	0,0226	1,9003	-1,89E-06	9,03E-04
	N = 50			Aditivo		Dual Y		Modelo		Mult	
Média	3,0000	0,1000	0,1011	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9818	0,0790	3,0201	9,00E-01	1,20E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0032	1,41E-09	7,37E-11	Variância	0,0045	0,0018	56,3598	3,99E-05	4,47E-07
Viés	0,0000	0,0000	0,0011	2,07E-07	3,14E-07	Viés	-0,0182	-0,0210	2,9201	-2,10E-04	2,01E-04
	N = 50			Dual II		Dual II		Modelo		Mult	
Média	2,9989	0,0995	0,1079	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9921	0,1045	0,0006	9,00E-01	1,16E-03
Variância	0,0004	0,0000	0,0154	6,79E-07	2,40E-10	Variância	0,0080	0,0005	0,2673	5,48E-05	1,96E-07
Viés	-0,0011	-0,0005	0,0079	-3,45E-05	1,87E-07	Viés	-0,0079	0,0045	-0,0994	-1,33E-04	1,56E-04

Tabela 4 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			Kmenta	Primal					LM	Primal	Mult
Média	3,0711	0,2212	0,3627	8,02E-01	6,77E-04	Média	3,0864	0,1952	6,9741	8,03E-01	7,33E-04
Variancia	0,0175	0,0173	62873,2218	9,25E-05	3,23E-07	Variancia	0,0369	0,0169	379,0873	2,82E-04	4,30E-07
Viés	0,0711	0,1212	-0,1373	1,95E-03	-3,23E-04	Viés	0,0864	0,0952	6,4741	3,24E-03	-2,67E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Primal	Aditivo				Kmenta	Dual	
Média	3,0197	0,1208	3,5160	8,01E-01	9,26E-04	Média	3,2190	0,1829	1,5200	8,00E-01	1,42E-03
Variancia	0,0054	0,0047	118,2763	4,54E-05	7,75E-08	Variancia	11,2520	0,0377	753,5088	3,03E-06	1,83E-07
Viés	0,0197	0,0208	3,0160	7,79E-04	-7,38E-05	Viés	0,2190	0,0829	1,0200	-9,69E-06	4,15E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Dual Y	Aditivo				LM	Dual Y	Mult
Média	2,9893	0,0804	4,3649	8,00E-01	1,08E-03	Média	2,9865	0,0897	11,6979	8,00E-01	1,13E-03
Variancia	0,0005	0,0019	82,2173	1,44E-06	4,01E-08	Variancia	0,0010	0,0091	743,2263	7,97E-06	2,22E-07
Viés	-0,0107	-0,0196	3,8649	4,45E-05	8,16E-05	Viés	-0,0135	-0,0103	11,1979	1,58E-04	1,27E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Dual II	Aditivo				LM	Dual II	Mult
Média	2,9952	0,0923	1,0751	8,00E-01	1,04E-03	Média	2,9838	0,0861	4,3391	8,00E-01	1,20E-03
Variancia	0,0003	0,0007	3,5755	9,23E-07	1,25E-08	Variancia	0,0020	0,0023	93,1393	1,02E-05	1,69E-07
Viés	-0,0048	-0,0077	0,5751	6,41E-05	4,11E-05	Viés	-0,0162	-0,0139	3,8391	4,07E-04	2,05E-04
Verdadeiro	3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			Kmenta	Primal					LM	Primal	Mult
Média	3,0900	0,2098	1,2011	9,02E-01	8,42E-05	Média	3,0878	0,1596	8,7512	9,04E-01	6,35E-04
Variancia	0,0149	0,0061	28540,7013	2,48E-05	6,71E-07	Variancia	0,0639	0,0139	421,9660	3,26E-04	8,92E-07
Viés	0,0900	0,1098	0,7011	1,73E-03	-9,16E-04	Viés	0,0878	0,0596	8,2512	3,52E-03	-3,65E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Primal	Aditivo				Kmenta	Dual	
Média	3,0002	0,1001	0,4949	9,00E-01	9,99E-04	Média	3,2036	0,1349	1,8359	9,00E-01	1,88E-03
Variancia	0,000027	0,000015	0,077560	1,37E-07	1,16E-09	Variancia	2,8975	0,0198	396,0845	1,88E-07	1,86E-07
Viés	0,000172	0,000119	-0,005113	9,31E-06	-1,19E-06	Viés	0,2036	0,0349	1,3359	1,50E-05	8,83E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Dual Y	Aditivo				LM	Dual Y	Mult
Média	2,9932	0,0989	0,5067	8,99E-01	1,02E-03	Média	2,9828	0,0801	5,5872	9,00E-01	1,23E-03
Variancia	0,0056	0,0001	0,0699	4,14E-05	1,45E-07	Variancia	0,0058	0,0021	169,1025	5,04E-05	4,90E-07
Viés	-0,0068	-0,0011	0,0067	-5,02E-04	2,42E-05	Viés	-0,0172	-0,0199	5,0872	-3,39E-04	2,29E-04
	N = 50			Modelo			N = 50			Modelo	
			LM	Dual II	Aditivo				LM	Dual II	Mult
Média	2,9995	0,0996	0,5089	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9935	0,1068	0,2643	9,00E-01	1,10E-03
Variancia	0,0001	0,0000	0,0185	6,55E-08	7,11E-11	Variancia	0,0084	0,0005	0,4490	6,57E-05	2,07E-07
Viés	-0,0005	-0,0004	0,0089	-1,18E-05	-2,23E-07	Viés	-0,0065	0,0068	-0,2357	-1,88E-04	1,04E-04

Tabela 5 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0837	0,2696	0,8289	8,03E-01	4,59E-04	Média	3,0959	0,2408	9,1251	8,04E-01	5,86E-04
Variância	0,0165	0,0137	7723,9969	8,89E-05	3,67E-07	Variância	0,0338	0,0203	696,6261	2,81E-04	3,83E-07
Viés	0,0837	0,1696	-0,1711	2,57E-03	-5,41E-04	Viés	0,0959	0,1408	8,1251	4,08E-03	-4,14E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0264	0,1372	6,0634	8,01E-01	8,61E-04	Média	3,1838	0,1899	1,3598	8,00E-01	1,41E-03
Variância	0,0052	0,0061	331,2738	4,62E-05	1,00E-07	Variância	19,2656	0,0379	465,8917	3,09E-06	1,80E-07
Viés	0,0264	0,0372	5,0634	1,11E-03	-1,39E-04	Viés	0,1838	0,0899	0,3598	6,53E-06	4,10E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9907	0,0798	7,1495	8,00E-01	1,09E-03	Média	2,9878	0,1055	16,2071	8,00E-01	1,12E-03
Variância	0,0004	0,0021	221,0581	1,47E-06	4,59E-08	Variância	0,0010	0,0189	1153,8446	7,83E-06	2,28E-07
Viés	-0,0093	-0,0202	6,1495	6,21E-05	9,12E-05	Viés	-0,0122	0,0055	15,2071	2,00E-04	1,23E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9962	0,0944	1,5695	8,00E-01	1,04E-03	Média	2,9849	0,0896	5,2472	8,00E-01	1,22E-03
Variância	0,0003	0,0007	5,3421	9,36E-07	1,69E-08	Variância	0,0019	0,0025	139,5426	1,06E-05	1,95E-07
Viés	-0,0038	-0,0056	0,5695	7,13E-05	4,36E-05	Viés	-0,0151	-0,0104	4,2472	4,03E-04	2,18E-04
Verdadeiro	3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,1038	0,2605	-0,0948	9,02E-01	-4,15E-04	Média	3,0850	0,2070	9,7141	9,03E-01	4,82E-04
Variância	0,0137	0,0103	598,5862	2,39E-05	8,76E-07	Variância	0,0535	0,0254	451,2970	2,93E-04	7,30E-07
Viés	0,1038	0,1605	-1,0948	1,99E-03	-1,41E-03	Viés	0,0850	0,1070	8,7141	3,40E-03	-5,18E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0003	0,1003	0,9977	9,00E-01	9,97E-04	Média	4,0780	0,1437	5,2896	9,00E-01	1,83E-03
Variância	0,000270	0,000286	0,1196853	1,39E-07	2,04E-09	Variância	4913,2024	0,0217	30482,9452	1,89E-07	1,81E-07
Viés	0,0002938	0,0003308	-0,0023174	8,06E-06	-3,24E-06	Viés	1,0780	0,0437	4,2896	1,49E-05	8,28E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9846	0,0984	1,0386	8,99E-01	1,03E-03	Média	2,9866	0,0858	8,1469	9,00E-01	1,21E-03
Variância	0,0154	0,0009	0,9809	7,73E-05	8,26E-08	Variância	0,0072	0,0036	313,9870	3,56E-05	4,68E-07
Viés	-0,0154	-0,0016	0,0386	-1,06E-03	3,10E-05	Viés	-0,0134	-0,0142	7,1469	-1,97E-04	2,12E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9998	0,0998	1,0050	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9929	0,1069	0,7230	9,00E-01	1,05E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0148	9,08E-09	9,72E-11	Variância	0,0080	0,0008	1,2625	5,70E-05	2,27E-07
Viés	-0,0002	-0,0002	0,0050	-3,84E-06	-3,40E-07	Viés	-0,0071	0,0069	-0,2770	-2,56E-04	5,23E-05

Tabela 6 – Resultados numéricos - continuação

Verdadeiro	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
	3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			Modelo			Primal	
	N = 50			Kmenta			N = 50			LM	
Média	4,4679	0,6931	0,0816	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9691	0,6097	-0,0110	7,99E-01	9,37E-04
Variancia	40,3876	0,5212	493,1547	9,70E-05	2,43E-07	Variancia	2,4153	0,1135	1,1083	2,67E-04	3,85E-07
Vies	1,4679	0,1931	0,5816	-2,11E-04	5,93E-07	Vies	-0,0309	0,1097	0,4890	-7,44E-04	-6,25E-05
	Modelo			Aditivo			Modelo			Dual	
	N = 50			Primal			N = 50			Kmenta	
Média	3,2816	0,5317	-0,3223	8,00E-01	9,81E-04	Média	2,6416	0,5883	-0,1442	8,00E-01	4,49E-03
Variancia	2,0805	0,1058	0,3903	7,51E-05	7,35E-08	Variancia	0,5156	0,0313	30,8047	3,07E-06	1,76E-07
Vies	0,2816	0,0317	0,1777	1,02E-04	-1,86E-05	Vies	-0,3584	0,0883	0,3558	-2,32E-05	3,49E-03
	Modelo			Dual Y			N = 50			LM	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Dual Y	
Média	2,9002	0,5516	-0,4230	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,8876	0,5786	-0,3463	8,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,4738	0,0353	0,0602	2,38E-06	3,36E-09	Variancia	0,9318	0,0673	0,1532	1,41E-05	1,61E-08
Vies	-0,0998	0,0516	0,0770	1,85E-05	8,51E-07	Vies	-0,1124	0,0786	0,1537	2,15E-05	1,56E-06
	Modelo			Dual II			N = 50			LM	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Dual II	
Média	2,9431	0,5273	-0,4648	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,8866	0,5806	-0,3350	8,00E-01	1,02E-03
Variancia	0,2245	0,0167	0,0239	1,25E-06	1,43E-09	Variancia	0,9754	0,0709	0,1713	3,17E-05	1,98E-08
Vies	-0,0569	0,0273	0,0352	-2,03E-05	2,98E-06	Vies	-0,1134	0,0806	0,1650	-1,45E-04	1,71E-05
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			N = 50			LM	
	N = 50			Kmenta			N = 50			Primal	
Média	4,2392	0,7054	-0,1559	9,00E-01	1,06E-03	Média	3,3296	0,6050	-0,0157	8,99E-01	1,04E-03
Variancia	36,3029	0,3805	179,7871	2,64E-05	2,67E-07	Variancia	10,8088	0,1133	2,6046	3,53E-04	7,75E-07
Vies	1,2392	0,2054	0,3441	3,80E-04	5,93E-05	Vies	0,3296	0,1050	0,4843	-6,85E-04	4,02E-05
	Modelo			Aditivo			N = 50			Dual	
	N = 50			Primal			N = 50			Kmenta	
Média	3,1037	0,4962	-0,5036	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,5878	0,6260	-0,4012	9,00E-01	8,93E-03
Variancia	0,3952	0,0151	0,0162	5,10E-07	7,93E-10	Variancia	0,1294	0,0095	3,6394	1,90E-07	1,76E-07
Vies	0,1037	-0,0038	-0,0036	1,43E-05	3,63E-07	Vies	-0,4122	0,1260	0,0988	-2,51E-05	7,93E-03
	Modelo			Dual Y			N = 50			LM	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Dual Y	
Média	2,9996	0,5002	-0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9149	0,5702	-0,3807	9,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,0019	0,0001	0,0001	3,82E-09	8,20E-12	Variancia	1,0649	0,0591	0,1097	7,67E-06	8,40E-09
Vies	-0,0004	0,0002	0,0002	-2,82E-07	8,44E-09	Vies	-0,0851	0,0702	0,1193	3,65E-05	5,63E-06
	Modelo			Dual II			N = 50			LM	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Dual Y	
Média	2,9995	0,5001	-0,4999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9239	0,5609	-0,4031	9,00E-01	1,10E-03
Variancia	0,0006	0,0000	0,0000	1,84E-09	5,82E-12	Variancia	0,9333	0,0516	0,0887	2,91E-06	5,00E-08
Vies	-0,0005	0,0001	0,0001	7,98E-07	5,69E-08	Vies	-0,0761	0,0609	0,0969	1,71E-04	9,53E-05

Tabela 7 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Kmenta			Modelo			LM	
	N = 50			Primal			N = 50			Mult	
Média	4,5039	0,4516	0,0832	7,99E-01	9,83E-04	Média	2,9013	0,5511	0,7566	7,98E-01	9,99E-04
Variância	24,8246	1,4310	625,8180	8,64E-05	2,42E-07	Variância	0,9408	0,1341	3,9233	2,36E-04	3,76E-07
Viés	1,5039	-0,0484	-0,0168	-1,20E-03	-1,69E-05	Viés	-0,0987	0,0511	0,6566	-2,45E-03	-7,61E-07
	Modelo			Aditivo			Modelo			Dual	
	N = 50			Primal			N = 50			Kmenta	
Média	3,0562	0,4998	0,3624	7,99E-01	9,90E-04	Média	4,5589	0,4469	1,7206	8,00E-01	2,82E-03
Variância	7,8375E-01	0,1197	3,1252	8,27E-05	9,53E-08	Variância	16076,7092	0,0438	954,3484	3,05E-06	1,82E-07
Viés	5,6241E-02	-0,0002	0,2624	-7,97E-04	-1,01E-05	Viés	1,5589	-0,0531	1,6206	-2,82E-06	1,82E-03
	Modelo			Dual Y			Modelo			Dual Y	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Mult	
Média	2,9039	0,5501	0,2756	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,8612	0,5706	0,3901	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,1669	0,0376	0,3287	2,79E-06	1,06E-08	Variância	0,2844	0,0616	0,6257	6,98E-06	4,32E-08
Viés	-0,0961	0,0501	0,1756	3,88E-06	1,03E-05	Viés	-0,1388	0,0706	0,2901	5,90E-05	2,04E-05
	Modelo			Dual II			Modelo			Dual II	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Mult	
Média	2,9585	0,5229	0,1628	8,00E-01	1,02E-03	Média	2,8971	0,5549	0,2996	8,00E-01	1,15E-03
Variância	0,0609	0,0144	0,0936	1,41E-06	7,98E-09	Variância	0,2329	0,0517	0,4501	9,14E-06	1,17E-07
Viés	-0,0415	0,0229	0,0628	3,23E-05	2,23E-05	Viés	-0,1029	0,0549	0,1996	2,89E-04	1,51E-04
Verdadeiro	3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			Modelo			Mult	
	N = 50			Kmenta			N = 50			LM	
Média	3,7215	0,4815	0,3905	9,00E-01	9,46E-04	Média	2,9423	0,5500	0,8082	8,99E-01	1,08E-03
Variância	7,1613	0,5400	1098,2916	2,33E-05	4,00E-07	Variância	1,5045	0,1331	3,3957	2,32E-04	8,79E-07
Viés	0,7215	-0,0185	0,2905	-2,74E-04	-5,39E-05	Viés	-0,0577	0,0500	0,7082	-5,47E-04	7,86E-05
	Modelo			Aditivo			Modelo			Dual	
	N = 50			Primal			N = 50			Kmenta	
Média	3,0071	0,4995	0,0988	9,00E-01	9,99E-04	Média	3,0314	0,5123	0,5739	9,00E-01	5,06E-03
Variância	0,0376	0,0054	0,0244	6,58E-07	2,12E-09	Variância	2,8943	0,0172	179,5305	1,89E-07	1,82E-07
Viés	0,0071	-0,0005	-0,0012	5,97E-06	-7,73E-07	Viés	0,0314	0,0123	0,4739	5,44E-06	4,06E-03
	Modelo			Dual Y			Modelo			Dual Y	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Mult	
Média	2,9998	0,5001	0,1003	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,8554	0,5664	0,3416	9,00E-01	1,05E-03
Variância	0,0007	0,0001	0,0007	6,41E-09	3,74E-11	Variância	0,2534	0,0447	0,4278	1,46E-06	5,96E-08
Viés	-0,0002	0,0001	0,0003	5,34E-07	1,29E-09	Viés	-0,1446	0,0664	0,2416	6,06E-05	5,27E-05
	Modelo			Dual II			Modelo			Dual II	
	N = 50			Aditivo			N = 50			Mult	
Média	2,9999	0,5000	0,1001	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0143	0,4999	0,1196	9,00E-01	9,73E-04
Variância	0,0001	0,0000	0,0001	3,09E-09	1,05E-10	Variância	0,0920	0,0195	0,1548	2,11E-06	1,91E-07
Viés	-0,0001	0,0000	0,0001	1,97E-07	-1,10E-07	Viés	0,0143	-0,0001	0,0196	2,10E-05	-2,65E-05

Tabela 8 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Mult				
Média	4,0396	0,3951	1,5894	7,99E-01	8,93E-04	Média	2,8774	0,5221	1,2136	7,99E-01	9,17E-04
Variancia	12,6555	1,7488	20073,2786	8,79E-05	2,77E-07	Variancia	0,5730	0,1358	6,5492	2,52E-04	4,22E-07
Vies	1,0396	-0,1049	1,0894	-5,61E-04	-1,07E-04	Vies	-0,1226	0,0221	0,7136	-1,24E-03	-8,31E-05
	N = 50 Modelo LM Primal Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0077	0,4853	0,7849	8,00E-01	9,65E-04	Média	4,8375	0,3551	4,8738	8,00E-01	2,34E-03
Variancia	0,4889	0,1281	3,9896	6,99E-05	1,05E-07	Variancia	13366,5816	0,0509	53442,6934	3,01E-06	1,82E-07
Vies	0,0077	-0,0147	0,2849	-3,84E-04	-3,48E-05	Vies	1,8375	-0,1449	4,3738	-1,85E-05	1,34E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,8979	0,5620	0,8214	8,00E-01	1,02E-03	Média	2,8645	0,5763	0,9721	8,00E-01	1,04E-03
Variancia	0,1303	0,0508	0,8884	2,34E-06	1,48E-08	Variancia	0,2137	0,0785	1,5669	7,29E-06	7,05E-08
Vies	-0,1021	0,0620	0,3214	2,21E-05	2,18E-05	Vies	-0,1355	0,0763	0,4721	1,16E-04	3,61E-05
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9798	0,5146	0,5556	8,00E-01	1,03E-03	Média	2,9602	0,5251	0,6330	8,00E-01	1,17E-03
Variancia	0,0400	0,0173	0,2031	1,42E-06	1,47E-08	Variancia	0,1241	0,0502	0,7505	9,42E-06	1,45E-07
Vies	-0,0202	0,0146	0,0556	5,95E-05	3,36E-05	Vies	-0,0398	0,0251	0,1330	3,44E-04	1,72E-04
Verdadeiro	3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Mult				
Média	3,4261	0,4378	1,8166	9,00E-01	6,27E-04	Média	2,8873	0,5268	1,2143	9,01E-01	8,70E-04
Variancia	3,2017	0,5211	23364,8188	2,42E-05	5,49E-07	Variancia	0,8448	0,1215	5,9825	2,57E-04	9,89E-07
Vies	0,4261	-0,0622	1,3166	1,27E-05	-3,73E-04	Vies	-0,1127	0,0268	0,7143	7,62E-04	-1,30E-04
	N = 50 Modelo LM Primal Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0042	0,4985	0,4950	9,00E-01	9,97E-04	Média	3,3287	0,4708	1,2867	9,00E-01	3,88E-03
Variancia	0,0163	0,0042	0,0323	4,08E-07	2,67E-09	Variancia	310,7309	0,0285	1406,0690	1,84E-07	1,80E-07
Vies	0,0042	-0,0015	-0,0050	2,10E-06	-2,82E-06	Vies	0,3287	-0,0292	0,7867	2,05E-05	2,88E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9990	0,5007	0,5021	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,8186	0,5956	0,9960	9,00E-01	1,21E-03
Variancia	0,0007	0,0002	0,0026	4,17E-09	7,71E-11	Variancia	0,2150	0,0627	1,1719	1,56E-06	3,25E-07
Vies	-0,0010	0,0007	0,0021	-1,40E-07	3,32E-07	Vies	-0,1814	0,0956	0,4960	1,06E-04	2,14E-04
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0001	0,4999	0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9362	0,5373	0,7305	9,00E-01	9,83E-04
Variancia	0,0000	0,0000	0,0002	2,56E-09	7,61E-11	Variancia	0,1059	0,0393	0,8157	2,20E-06	1,98E-07
Vies	0,0001	-0,0001	-0,0002	1,01E-06	1,48E-07	Vies	-0,0638	0,0373	0,2305	9,41E-05	-1,70E-05

Tabela 9 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,5800	0,3544	-12,2501	8,00E-01	7,09E-04	Média	2,8461	0,5112	1,7482	8,00E-01	7,66E-04
Variância	4,9817	1,6949	1422005,5074	8,68E-05	3,25E-07	Variância	0,3438	0,1261	12,5480	2,57E-04	4,25E-07
Viés	0,5800	-0,1456	-13,2501	1,59E-04	-2,91E-04	Viés	-0,1539	0,0112	0,7482	1,70E-04	-2,34E-04
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	2,9864	0,4647	1,2283	8,00E-01	9,07E-04	Média	3,4200	0,2901	1,7292	8,00E-01	2,02E-03
Variância	0,3083	0,1312	7,4007	6,18E-05	1,18E-07	Variância	44,9539	0,0412	122,2478	3,02E-06	1,84E-07
Viés	-0,0136	-0,0353	0,2283	2,23E-04	-9,25E-05	Viés	0,4200	-0,2099	0,7292	1,75E-05	1,02E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9016	0,5706	1,5268	8,00E-01	1,04E-03	Média	2,8780	0,5762	1,6939	8,00E-01	1,06E-03
Variância	0,0982	0,0651	2,1527	2,04E-06	2,25E-08	Variância	0,1527	0,0936	3,5457	7,40E-06	1,08E-07
Viés	-0,0984	0,0706	0,5268	4,85E-05	4,11E-05	Viés	-0,1220	0,0762	0,6939	1,42E-04	6,41E-05
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0003	0,4993	0,9997	8,00E-01	1,03E-03	Média	2,9935	0,4992	1,0303	8,00E-01	1,18E-03
Variância	0,0224	0,0175	0,3641	1,32E-06	2,02E-08	Variância	0,0675	0,0487	1,2907	9,52E-06	1,75E-07
Viés	0,0003	-0,0007	-0,0003	7,12E-05	3,26E-05	Viés	-0,0065	-0,0008	0,0303	3,55E-04	1,81E-04
Verdadeiro	3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,1656	0,4404	0,8970	9,01E-01	1,44E-04	Média	2,8764	0,5099	1,6258	9,01E-01	6,61E-04
Variância	1,3977	0,4383	9833,5812	2,31E-05	7,73E-07	Variância	0,4750	0,1046	9,2058	2,68E-04	9,24E-07
Viés	0,1656	-0,0596	-0,1030	5,65E-04	-8,56E-04	Viés	-0,1236	0,0099	0,6258	1,32E-03	-3,39E-04
	N = 50 Modelo LM Primal Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0001	0,5000	0,9986	9,00E-01	9,97E-04	Média	3,3324	0,4038	1,3124	9,00E-01	3,09E-03
Variância	0,0090	0,0040	0,0506	2,99E-07	3,89E-09	Variância	42,2939	0,0337	226,2890	1,89E-07	1,84E-07
Viés	0,0001	0,0000	-0,0014	4,80E-06	-3,04E-06	Viés	0,3324	-0,0962	0,3124	3,94E-05	2,09E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9971	0,5023	1,0109	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,8567	0,5925	1,6250	9,00E-01	1,28E-03
Variância	0,0011	0,0007	0,0162	3,07E-09	7,88E-10	Variância	0,1382	0,0700	2,1904	1,68E-06	4,24E-07
Viés	-0,0029	0,0023	0,0109	-1,43E-06	2,30E-06	Viés	-0,1433	0,0925	0,6250	1,50E-04	2,80E-04
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9988	0,5011	1,0054	9,00E-01	9,93E-04	Média	2,9143	0,5586	1,5222	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0003	0,0002	0,0054	6,86E-09	6,81E-09	Variância	0,0796	0,0506	2,3792	2,34E-06	1,67E-07
Viés	-0,0012	0,0011	0,0054	-5,74E-06	-6,64E-06	Viés	-0,0857	0,0586	0,5222	8,23E-05	6,82E-06

Tabela 10 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Mult				
Média	1,1130E+06	1,0514	12,1623	8,01E-01	9,96E-04	Média	3,8896	0,8693	0,2093	8,02E-01	9,66E-04
Variância	4,8162E+15	2,6290	1477420,9196	1,05E-04	2,54E-07	Variância	3,8707	0,0237	20,7770	2,77E-04	4,40E-07
Viés	1,1130E+06	0,1514	12,6623	7,12E-04	-3,63E-06	Viés	0,8896	-0,0307	0,7093	2,10E-03	-3,36E-05
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,9126	0,8166	0,0757	8,01E-01	9,92E-04	Média	4,8926	0,6222	1,9944	8,00E-01	4,99E-03
Variância	2,7260	0,0280	18,6305	5,22E-05	6,07E-08	Variância	1005,0638	0,0597	11990,0591	3,04E-06	1,86E-07
Viés	0,9126	-0,0834	0,5757	1,42E-03	-7,53E-06	Viés	1,8926	-0,2778	2,4944	-4,81E-05	3,99E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	4,0150	0,7470	-0,5668	8,01E-01	1,06E-03	Média	3,8013	0,7819	-0,4792	8,01E-01	1,06E-03
Variância	4,4554	0,0687	0,1584	1,16E-04	2,42E-07	Variância	3,8111	0,0648	0,2340	1,03E-04	2,37E-07
Viés	1,0150	-0,1530	-0,0668	8,39E-04	5,73E-05	Viés	0,8013	-0,1181	0,0208	1,37E-03	5,50E-05
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	4,0672	0,7365	-0,5632	8,00E-01	1,14E-03	Média	3,7935	0,7890	-0,4639	8,01E-01	1,10E-03
Variância	4,6452	0,0677	0,3191	1,56E-04	1,19E-06	Variância	3,9702	0,0626	0,1912	1,42E-04	9,96E-07
Viés	1,0672	-0,1635	-0,0632	3,19E-04	1,35E-04	Viés	0,7935	-0,1110	0,0361	7,72E-04	1,01E-04
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Mult				
Média	4,4544E+05	1,0952	-0,1234	9,01E-01	1,08E-03	Média	37,9837	0,8557	1,2318	9,02E-01	1,18E-03
Variância	7,7998E+14	1,7873	146,1028	2,87E-05	2,92E-07	Variância	6,1182E+04	0,0422	41,8543	7,24E-04	2,51E-06
Viés	4,4543E+05	0,1952	0,3766	9,63E-04	7,89E-05	Viés	34,9837	-0,0443	1,7318	1,97E-03	1,78E-04
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,8072	0,7919	0,8928	9,00E-01	1,03E-03	Média	3,8097	0,6812	0,0108	9,00E-01	9,99E-03
Variância	3,4157	0,0428	36,8781	5,81E-05	6,48E-07	Variância	0,3530	0,0689	2,7876	1,91E-07	1,82E-07
Viés	0,8072	-0,1081	1,3928	3,75E-05	3,20E-05	Viés	0,8097	-0,2188	0,5108	1,06E-06	8,99E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	4,5173	0,6595	-0,6632	9,02E-01	1,81E-03	Média	4,1159	0,7193	-0,5887	9,02E-01	1,78E-03
Variância	3,5164	0,0975	0,0267	2,83E-04	2,34E-06	Variância	3,9170	0,0982	0,1107	2,78E-04	2,36E-06
Viés	1,5173	-0,2405	-0,1632	1,86E-03	8,10E-04	Viés	1,1159	-0,1807	-0,0887	1,93E-03	7,82E-04
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	4,3868	0,6636	-0,6561	9,02E-01	2,21E-03	Média	3,9626	0,7270	-0,5734	9,03E-01	2,04E-03
Variância	3,3684	0,0946	0,0255	2,81E-04	7,15E-06	Variância	2,6880	0,0930	0,1215	2,55E-04	5,77E-06
Viés	1,3868	-0,2364	-0,1561	2,42E-03	1,21E-03	Viés	0,9626	-0,1730	-0,0734	2,66E-03	1,04E-03

Tabela 11 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	4,3870E+06	1,0392	0,0071	8,01E-01	1,13E-03	Média	5,0040	0,7094	0,9240	7,99E-01	1,07E-03
Variancia	1,9023E+17	6,8447	30,9971	9,31E-05	2,48E-07	Variancia	16,7631	0,1184	22,0910	2,86E-04	4,23E-07
Viés	4,3870E+06	0,1392	-0,0929	1,31E-03	1,30E-04	Viés	2,0040	-0,1906	0,8240	-6,24E-04	6,95E-05
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	5,1022	0,6256	0,5070	8,00E-01	1,00E-03	Média	5,2461	0,6014	2,1495	8,00E-01	4,45E-03
Variancia	7,9571	0,1173	14,5102	8,58E-05	8,49E-08	Variancia	8568,2107	0,0562	661,0188	3,04E-06	1,79E-07
Viés	2,1022	-0,2744	0,4070	-3,73E-04	3,09E-06	Viés	2,2461	-0,2986	2,0495	-2,93E-05	3,45E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,3401	0,8304	0,1345	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,6995	0,7746	0,1223	8,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,9517	0,0318	0,1967	6,80E-06	4,28E-09	Variancia	2,1836	0,0620	0,3398	2,21E-05	1,84E-08
Viés	0,3401	-0,0696	0,0345	6,79E-05	5,09E-06	Viés	0,6995	-0,1254	0,0223	2,16E-05	9,55E-06
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,1820	0,8593	0,1346	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,7626	0,7646	0,1215	8,00E-01	1,02E-03
Variancia	0,4914	0,0177	0,1213	6,01E-06	2,73E-09	Variancia	2,3904	0,0667	0,3727	3,68E-05	2,52E-08
Viés	0,1820	-0,0407	0,0346	2,51E-05	4,65E-06	Viés	0,7626	-0,1354	0,0215	3,38E-05	1,65E-05
Verdadeiro	3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,5376E+02	1,0007	-0,0359	9,01E-01	1,42E-03	Média	7,0909	0,6741	0,8991	9,00E-01	1,37E-03
Variancia	1,2721E+08	2,4904	39,0832	2,55E-05	4,19E-07	Variancia	61,8951	0,1366	21,9162	3,19E-04	1,46E-06
Viés	3,5076E+02	0,1007	-0,1359	1,15E-03	4,17E-04	Viés	4,0909	-0,2259	0,7991	4,28E-04	3,66E-04
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,1755	0,8674	0,7707	8,99E-01	9,04E-04	Média	3,5559	0,6951	1,4045	9,00E-01	8,72E-03
Variancia	0,6479	0,0140	19,0175	6,33E-06	7,25E-08	Variancia	0,2682	0,0544	269,9686	1,90E-07	1,79E-07
Viés	0,1755	-0,0326	0,6707	-8,31E-04	-9,57E-05	Viés	0,5559	-0,2049	1,3045	8,29E-06	7,72E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0377	0,8930	0,0848	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,6135	0,8037	0,0933	9,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,0142	0,0005	0,0030	4,60E-07	1,56E-10	Variancia	1,9650	0,0433	0,2206	2,82E-06	1,73E-08
Viés	0,0377	-0,0070	-0,0152	1,28E-05	1,92E-09	Viés	0,6135	-0,0963	-0,0067	1,12E-04	1,01E-05
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9710	0,9032	0,1160	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,4498	0,8254	0,0329	9,00E-01	1,10E-03
Variancia	0,0198	0,0002	0,0058	6,58E-06	1,83E-09	Variancia	1,2521	0,0286	0,0940	7,71E-06	9,17E-08
Viés	-0,0290	0,0032	0,0160	3,15E-04	1,57E-06	Viés	0,4498	-0,0746	-0,0671	4,14E-04	9,91E-05

Tabela 12 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Primal Mult				
Média	6,3446E+02	1,0358	0,1936	8,00E-01	1,14E-03	Média	4,6913	0,6622	0,9638	7,98E-01	1,09E-03
Variância	6,4377E+08	7,7092	267,6537	8,90E-05	2,58E-07	Variância	9,0400	0,1401	12,7862	2,49E-04	4,55E-07
Vies	6,3146E+02	0,1358	-0,3064	-2,32E-04	1,37E-04	Vies	1,6913	-0,2378	0,4638	-2,02E-03	9,00E-05
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	4,6838	0,6177	0,6515	7,99E-01	1,00E-03	Média	39,8145	0,5575	4,5082	8,00E-01	3,74E-03
Variância	6,2035	0,1278	12,4936	8,14E-05	1,27E-07	Variância	12102514,4814	0,0632	6146,9751	3,02E-06	1,81E-07
Vies	1,6838	-0,2823	0,1515	-7,64E-04	2,76E-07	Vies	36,8145	-0,3425	4,0082	2,06E-05	2,74E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,2325	0,8372	0,5231	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,4483	0,7895	0,5039	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,5648	0,0256	0,2888	1,06E-05	7,06E-09	Variância	1,1365	0,0496	0,4894	1,86E-05	2,58E-08
Vies	0,2325	-0,0628	0,0231	-5,69E-05	3,93E-06	Vies	0,4483	-0,1105	0,0039	-9,08E-06	9,29E-06
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,1164	0,8660	0,5188	8,00E-01	1,02E-03	Média	3,4803	0,7816	0,4842	8,00E-01	1,10E-03
Variância	0,2730	0,0126	0,1538	7,39E-06	9,43E-09	Variância	1,2126	0,0527	0,4910	2,51E-05	1,06E-07
Vies	0,1164	-0,0340	0,0188	-3,26E-05	1,72E-05	Vies	0,4803	-0,1184	-0,0158	1,08E-04	9,60E-05
Verdadeiro	3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50 Modelo Kmenta Primal						N = 50 Modelo LM Primal Mult				
Média	20,1664	0,9456	-0,0491	9,00E-01	1,35E-03	Média	5,8231	0,6469	0,8310	8,98E-01	1,36E-03
Variância	1,2434E+04	2,0708	156,4292	2,35E-05	5,17E-07	Variância	24,0850	0,1533	11,0352	2,49E-04	1,60E-06
Vies	17,1664	0,0456	-0,5491	2,65E-04	3,49E-04	Vies	2,8231	-0,2531	0,3310	-2,30E-03	3,58E-04
	N = 50 Modelo LM Aditivo						N = 50 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0565	0,8868	0,5128	9,00E-01	9,89E-04	Média	3,8829	0,6485	4,3497	9,00E-01	7,04E-03
Variância	0,1325	0,0037	0,1882	7,49E-07	1,28E-08	Variância	37,1710	0,0602	5971,6043	1,88E-07	1,80E-07
Vies	0,0565	-0,0132	0,0128	-4,38E-05	-1,10E-05	Vies	0,8829	-0,2515	3,8497	2,09E-05	6,04E-03
	N = 50 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9982	0,9001	0,5042	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,3191	0,8278	0,5338	9,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0067	0,0003	0,0036	4,61E-08	3,26E-11	Variância	0,9088	0,0314	0,3514	1,61E-06	1,96E-08
Vies	-0,0018	0,0001	0,0042	1,57E-06	3,57E-07	Vies	0,3191	-0,0722	0,0338	1,39E-04	1,65E-05
	N = 50 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 50 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9768	0,9044	0,5236	9,00E-01	9,85E-04	Média	3,1050	0,8715	0,5424	9,00E-01	9,88E-04
Variância	0,0050	0,0002	0,0054	1,58E-08	2,05E-09	Variância	0,2513	0,0101	0,1731	1,81E-06	1,46E-07
Vies	-0,0232	0,0044	0,0236	-3,76E-05	-1,47E-05	Vies	0,1050	-0,0285	0,0424	5,07E-05	-1,21E-05

Tabela 13 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	153,1867	0,8041	0,2574	7,99E-01	1,03E-03	Média	4,2229	0,6150	1,1794	7,98E-01	1,02E-03
Variancia	4,6800E+07	7,1894	995,2106	8,60E-05	3,00E-07	Variancia	4,2025	0,1510	14,7804	2,39E-04	4,93E-07
Viés	150,1867	-0,0959	-0,7426	-1,03E-03	2,83E-05	Viés	1,2229	-0,2850	0,1794	-2,46E-03	2,31E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	4,2619	0,5865	0,7449	7,99E-01	9,69E-04	Média	13,4956	0,4698	5,2804	8,00E-01	3,03E-03
Variancia	3,3011	0,1388	4,5563	8,18E-05	1,70E-07	Variancia	336232,2501	0,0782	2371,2150	3,03E-06	1,86E-07
Viés	1,2619	-0,3135	-0,2551	-8,58E-04	-3,07E-05	Viés	10,4956	-0,4302	4,2804	6,97E-05	2,03E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,2018	0,8260	1,0086	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,3435	0,7824	0,9768	8,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,4128	0,0296	0,5563	2,72E-06	9,64E-09	Variancia	0,7253	0,0520	0,8593	7,29E-06	3,73E-08
Viés	0,2018	-0,0740	0,0086	7,81E-05	8,00E-06	Viés	0,3435	-0,1176	-0,0232	1,83E-04	1,33E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,1073	0,8628	0,9538	8,00E-01	1,03E-03	Média	3,3714	0,7799	0,8273	8,00E-01	1,15E-03
Variancia	0,1496	0,0109	0,1812	1,36E-06	2,11E-08	Variancia	0,6240	0,0465	0,5753	8,92E-06	1,59E-07
Viés	0,1073	-0,0372	-0,0462	3,23E-05	2,99E-05	Viés	0,3714	-0,1201	-0,1727	2,42E-04	1,50E-04
Verdadeiro	3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	7,4502	0,9020	-1,2528	9,00E-01	9,28E-04	Média	4,6130	0,6426	1,0842	8,99E-01	1,17E-03
Variancia	1261,0300	1,5132	5443,8718	2,32E-05	7,17E-07	Variancia	8,8575	0,1557	6,1511	2,37E-04	1,47E-06
Viés	4,4502	0,0020	-2,2528	-2,33E-04	-7,23E-05	Viés	1,6130	-0,2574	0,0842	-1,42E-03	1,66E-04
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0384	0,8895	0,9908	9,00E-01	9,96E-04	Média	5,4009	0,5870	8,0085	9,00E-01	5,29E-03
Variancia	0,0630	0,0024	0,0547	6,65E-07	6,26E-09	Variancia	5673,6320	0,0722	82124,4434	1,88E-07	1,85E-07
Viés	0,0384	-0,0105	-0,0092	8,21E-06	-4,45E-06	Viés	2,4009	-0,3130	7,0085	4,20E-05	4,29E-03
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9733	0,9048	1,0414	9,00E-01	1,01E-03	Média	3,1750	0,8389	1,0839	9,00E-01	1,06E-03
Variancia	0,0107	0,0005	0,0199	2,40E-07	6,53E-10	Variancia	0,5449	0,0286	0,6126	1,55E-06	9,48E-08
Viés	-0,0267	0,0048	0,0414	-3,29E-06	5,56E-06	Viés	0,1750	-0,0611	0,0839	1,49E-04	6,32E-05
	N = 50						N = 50				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9981	0,9004	1,0029	9,00E-01	9,99E-04	Média	3,1151	0,8539	1,0966	9,00E-01	1,05E-03
Variancia	0,0006	0,0000	0,0010	3,89E-09	1,26E-10	Variancia	0,3187	0,0189	0,5379	1,82E-06	8,15E-08
Viés	-0,0019	0,0004	0,0029	-2,66E-06	-8,73E-07	Viés	0,1151	-0,0461	0,0966	1,66E-04	4,98E-05

Tabela 14 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			LM	
Média	3,0298	0,1151	-2,5948	8,01E-01	9,48E-04	Média	3,0114	0,0974	0,8733	7,99E-01	9,73E-04
Variância	0,0085	0,0020	68864,7982	4,07E-05	3,77E-08	Variância	0,0237	0,0041	12,8439	1,67E-04	1,09E-07
Viés	0,0298	0,0151	-2,0948	6,11E-04	-5,18E-05	Viés	0,0114	-0,0026	1,3733	-8,89E-04	-2,67E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0004	0,1003	-0,4822	8,00E-01	9,99E-04	Média	3,0357	0,1064	-0,2726	8,00E-01	1,34E-03
Variância	0,0004	0,0002	0,0789	2,96E-06	1,65E-09	Variância	0,1279	0,0058	185,9498	1,31E-06	1,93E-08
Viés	0,0004	0,0003	0,0178	-1,00E-05	-5,12E-07	Viés	0,0357	0,0064	0,2274	-5,58E-05	3,42E-04
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	2,9995	0,0994	-0,4892	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9799	0,0821	0,5478	8,00E-01	1,04E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0064	1,03E-07	7,37E-10	Variância	0,0018	0,0014	6,8824	4,44E-06	3,96E-08
Viés	-0,0005	-0,0006	0,0108	-2,39E-06	7,33E-07	Viés	-0,0201	-0,0179	1,0478	-2,12E-05	4,33E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual II	
Média	2,9997	0,0997	-0,4952	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9723	0,0809	0,2954	8,00E-01	1,06E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0027	5,36E-08	9,61E-11	Variância	0,0032	0,0015	3,2569	5,81E-06	1,90E-08
Viés	-0,0003	-0,0003	0,0048	-1,66E-06	4,21E-07	Viés	-0,0277	-0,0191	0,7954	7,85E-05	6,20E-05
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			LM	
Média	3,0396	0,1167	-0,3939	9,01E-01	8,63E-04	Média	3,0194	0,1112	1,0694	8,99E-01	9,70E-04
Variância	0,0072	0,0006	0,3435	1,14E-05	6,79E-08	Variância	0,0588	0,0048	34,0570	2,52E-04	5,26E-07
Viés	0,0396	0,0167	0,1061	7,12E-04	-1,37E-04	Viés	0,0194	0,0112	1,5694	-1,07E-03	-2,99E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0041	0,0997	-0,7611	9,00E-01	1,86E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	8,80E-10	1,36E-12	Variância	0,0053	0,0001	0,0961	7,79E-08	1,91E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-7,46E-08	-6,90E-09	Viés	0,0041	-0,0003	-0,2611	-6,41E-05	8,65E-04
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	2,9992	0,0997	-0,4929	9,00E-01	1,01E-03	Média	2,9722	0,0786	0,4248	9,00E-01	1,17E-03
Variância	0,0003	0,0000	0,0241	3,17E-07	1,98E-08	Variância	0,0029	0,0016	3,6717	2,79E-06	1,82E-07
Viés	-0,0008	-0,0003	0,0071	-1,82E-05	6,14E-06	Viés	-0,0278	-0,0214	0,9248	1,96E-05	1,70E-04
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual II	
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9850	0,0977	-0,4794	9,00E-01	1,07E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	3,49E-12	8,02E-14	Variância	0,0111	0,0006	0,1153	5,21E-05	1,67E-07
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-1,59E-08	6,89E-09	Viés	-0,0150	-0,0023	0,0206	-1,52E-04	7,15E-05

Tabela 15 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Primal						Primal	
Média	3,0715	0,1657	0,1744	8,03E-01	7,48E-04	Média	3,0613	0,1540	2,4759	8,01E-01	7,95E-04
Variancia	0,0076	0,0024	10,3717	3,93E-05	6,24E-08	Variancia	0,0207	0,0071	71,0756	1,61E-04	1,57E-07
Viés	0,0715	0,0657	0,0744	2,53E-03	-2,52E-04	Viés	0,0613	0,0540	2,3759	1,40E-03	-2,05E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Primal						Dual	
Média	3,0012	0,1008	0,1038	8,00E-01	9,96E-04	Média	3,1783	0,1374	4,1772	8,00E-01	1,40E-03
Variancia	0,0004	0,0002	0,5275	2,99E-06	3,04E-09	Variancia	5,6740	0,0217	37953,3669	1,27E-06	1,96E-08
Viés	0,0012	0,0008	0,0038	5,48E-05	-3,60E-06	Viés	0,1783	0,0374	4,0772	-1,44E-06	3,98E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Dual Y						Dual Y	
Média	2,9990	0,0980	0,1858	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,9866	0,0818	2,8616	8,00E-01	1,08E-03
Variancia	0,0000	0,0001	0,1694	1,08E-07	1,39E-09	Variancia	0,0009	0,0017	71,4860	4,33E-06	4,53E-08
Viés	-0,0010	-0,0020	0,0858	2,79E-07	5,94E-06	Viés	-0,0134	-0,0182	2,7616	6,44E-05	7,58E-05
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Dual II						Dual II	
Média	2,9998	0,0998	0,1048	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9846	0,0884	0,7977	8,00E-01	1,08E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0144	5,39E-08	3,14E-10	Variancia	0,0017	0,0013	4,6405	5,73E-06	3,34E-08
Viés	-0,0002	-0,0002	0,0048	2,44E-06	6,38E-07	Viés	-0,0154	-0,0116	0,6977	1,67E-04	7,74E-05
Verdadeiro	3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Primal						Primal	
Média	3,0859	0,1675	-0,2331	9,02E-01	3,89E-04	Média	3,0226	0,1492	2,3659	8,99E-01	7,41E-04
Variancia	0,0065	0,0021	255,2177	1,06E-05	1,69E-07	Variancia	0,0408	0,0072	87,9999	2,39E-04	6,58E-07
Viés	0,0859	0,0675	-0,3331	1,81E-03	-6,11E-04	Viés	0,0226	0,0492	2,2659	-1,13E-03	-2,59E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Primal						Dual	
Média	3,0000	0,1000	0,1001	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0589	0,1036	1,5815	9,00E-01	1,88E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0001	9,36E-10	3,69E-12	Variancia	2,2585	0,0041	6471,5461	7,86E-08	1,97E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0001	-1,84E-07	-4,12E-09	Viés	0,0589	0,0036	1,4815	9,86E-06	8,82E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Dual Y						Dual Y	
Média	2,9952	0,0934	0,4878	9,00E-01	1,07E-03	Média	2,9830	0,0810	2,2044	9,00E-01	1,22E-03
Variancia	0,0003	0,0005	1,7077	6,99E-09	6,14E-08	Variancia	0,0016	0,0017	26,3891	3,88E-06	2,39E-07
Viés	-0,0048	-0,0066	0,3878	-2,48E-05	7,35E-05	Viés	-0,0170	-0,0190	2,1044	1,08E-04	2,18E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Dual II						Dual II	
Média	2,9971	0,0996	0,0998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9917	0,0999	0,0775	9,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0023	0,0000	0,0094	7,04E-06	9,42E-09	Variancia	0,0075	0,0005	0,1063	4,22E-05	7,14E-08
Viés	-0,0029	-0,0004	-0,0002	-1,43E-04	4,97E-06	Viés	-0,0083	-0,0001	-0,0225	-3,58E-04	1,17E-06

Tabela 16 – Resultados numéricos - continuação

Verdadeiro	A	α	ρ	γ	θ	A	α	ρ	γ	θ
	3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03	3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	3,0901	0,2073	0,0357	8,03E-01	5,73E-04	3,0738	0,1947	2,8889	8,02E-01	6,57E-04
Variancia	0,0070	0,0033	22,6115	3,75E-05	7,79E-08	0,0181	0,0086	109,4578	1,54E-04	1,85E-07
Vies	0,0901	0,1073	-0,4643	3,29E-03	-4,27E-04	0,0738	0,0947	2,3889	1,98E-03	-3,43E-04
	Modelo			Aditivo		Modelo			Dual	
	N = 100					N = 100				
Média	3,0013	0,1011	0,4985	8,00E-01	9,94E-04	3,2334	0,1511	2,2127	8,00E-01	1,39E-03
Variancia	0,0004	0,0002	1,0044	2,94E-06	4,49E-09	5,7318	0,0270	735,9468	1,26E-06	1,96E-08
Vies	0,0013	0,0011	-0,0015	5,87E-05	-5,88E-06	0,2334	0,0511	1,7127	4,08E-05	3,94E-04
	Modelo			Dual Y		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	2,9986	0,0969	0,7094	8,00E-01	1,01E-03	2,9887	0,0846	4,6595	8,00E-01	1,08E-03
Variancia	0,0000	0,0002	1,1352	1,03E-07	3,20E-09	0,0007	0,0023	176,3944	4,32E-06	4,91E-08
Vies	-0,0014	-0,0031	0,2094	4,98E-07	1,24E-05	-0,0113	-0,0154	4,1595	5,50E-05	7,75E-05
	Modelo			Dual II		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	2,9998	0,0998	0,5058	8,00E-01	1,00E-03	2,9866	0,0908	1,2190	8,00E-01	1,08E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0203	5,49E-08	4,56E-10	0,0015	0,0013	6,9471	5,60E-06	4,27E-08
Vies	-0,0002	-0,0002	0,0058	5,06E-06	1,02E-06	-0,0134	-0,0092	0,7190	1,94E-04	7,82E-05
Verdadeiro	3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03	3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	3,1054	0,2108	0,0943	9,02E-01	-6,22E-06	3,0126	0,1721	3,1728	8,98E-01	6,09E-04
Variancia	0,0064	0,0038	3,8639	1,04E-05	2,56E-07	0,0335	0,0112	135,9725	2,22E-04	5,80E-07
Vies	0,1054	0,1108	-0,4057	2,24E-03	-1,01E-03	0,0126	0,0721	2,6728	-1,61E-03	-3,91E-04
	Modelo			Aditivo		Modelo			Dual	
	N = 100					N = 100				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	3,1093	0,1093	1,5943	9,00E-01	1,79E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0001	1,02E-09	6,37E-12	1,7553	0,0080	837,4755	7,79E-08	1,89E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,51E-07	-1,78E-08	0,1093	0,0093	1,0943	3,43E-05	7,90E-04
	Modelo			Dual Y		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	2,9969	0,0945	0,8293	9,00E-01	1,07E-03	2,9865	0,0860	3,1911	9,00E-01	1,18E-03
Variancia	0,0001	0,0003	1,1172	3,07E-09	4,54E-08	0,0030	0,0017	61,7787	1,48E-05	3,75E-07
Vies	-0,0031	-0,0055	0,3293	-1,72E-05	6,64E-05	-0,0135	-0,0140	2,6911	-4,24E-05	1,75E-04
	Modelo			Dual II		Modelo			Mult	
	N = 100					N = 100				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	2,9939	0,0983	0,5731	9,00E-01	9,98E-04
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	3,68E-12	3,47E-14	0,0024	0,0006	0,2056	1,26E-05	3,56E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,13E-08	-1,31E-09	-0,0061	-0,0017	0,0731	-6,62E-05	-2,04E-06

Tabela 17 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Primal						N = 100 Modelo Mult				
Média	3,1043	0,2604	0,0809	8,04E-01	3,56E-04	Média	3,0805	0,2477	3,1361	8,02E-01	4,85E-04
Variancia	0,0066	0,0057	9,2720	3,67E-05	1,03E-07	Variancia	0,0153	0,0105	157,5250	1,47E-04	1,84E-07
Viés	0,1043	0,1604	-0,9191	3,93E-03	-6,44E-04	Viés	0,0805	0,1477	2,1361	2,25E-03	-5,15E-04
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Dual				
Média	3,0021	0,1029	1,0080	8,00E-01	9,87E-04	Média	3,2816	0,1628	4,8756	8,00E-01	1,37E-03
Variancia	0,0004	0,0004	3,0300	2,92E-06	7,02E-09	Variancia	61,1474	0,0304	73392,6328	1,27E-06	1,91E-08
Viés	0,0021	0,0029	0,0080	7,29E-05	-1,32E-05	Viés	0,2816	0,0628	3,8756	4,84E-05	3,68E-04
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo Dual Y Mult				
Média	2,9983	0,0958	1,4596	8,00E-01	1,02E-03	Média	2,9908	0,0893	6,4059	8,00E-01	1,07E-03
Variancia	0,0001	0,0003	5,0964	1,03E-07	6,16E-09	Variancia	0,0006	0,0031	294,5448	4,31E-06	4,92E-08
Viés	-0,0017	-0,0042	0,4596	3,72E-06	1,93E-05	Viés	-0,0092	-0,0107	5,4059	5,61E-05	6,95E-05
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo Dual II Mult				
Média	2,9999	0,1000	1,0002	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9889	0,0942	1,6779	8,00E-01	1,06E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0234	5,51E-08	5,29E-10	Variancia	0,0013	0,0014	10,1725	5,49E-06	4,94E-08
Viés	-0,0001	0,0000	0,0002	4,33E-06	2,32E-07	Viés	-0,0111	-0,0058	0,6779	1,70E-04	6,40E-05
Verdadeiro	3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo Kmenta Mult				
Média	3,1223	0,2677	0,2468	9,03E-01	-5,40E-04	Média	3,0044	0,1883	3,6348	8,98E-01	4,94E-04
Variancia	0,0060	0,0057	1,4591	9,90E-06	3,55E-07	Variancia	0,0291	0,0165	166,5961	2,16E-04	4,76E-07
Viés	0,1223	0,1677	-0,7532	2,57E-03	-1,54E-03	Viés	0,0044	0,0883	2,6348	-1,95E-03	-5,06E-04
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Dual				
Média	3,0000	0,1000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1899	0,1206	2,6455	9,00E-01	1,67E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0001	1,02E-09	1,11E-11	Variancia	4,4375	0,0133	2108,4647	8,04E-08	1,93E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	6,04E-07	-5,13E-08	Viés	0,1899	0,0206	1,6455	5,08E-05	6,71E-04
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,1000	1,0003	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9901	0,0903	4,5110	9,00E-01	1,09E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0014	1,56E-11	6,31E-11	Variancia	0,0027	0,0019	124,3651	1,50E-05	3,31E-07
Viés	0,0000	0,0000	0,0003	7,14E-08	5,14E-08	Viés	-0,0099	-0,0097	3,5110	-1,26E-05	8,98E-05
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo Dual II Mult				
Média	3,0000	0,1000	1,0004	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9931	0,0984	1,1460	9,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0013	3,48E-09	3,00E-10	Variancia	0,0008	0,0009	0,5920	2,51E-06	1,82E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0004	-9,85E-07	-2,98E-07	Viés	-0,0069	-0,0016	0,1460	5,04E-05	7,71E-06

Tabela 18 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Kmenta						LM	
				Primal						Mult	
Média	2,9329	0,6844	-0,1404	7,99E-01	1,05E-03	Média	3,1813	0,5613	-0,1750	8,00E-01	1,02E-03
Variância	3,4846	0,1318	214,1957	3,98E-05	3,47E-08	Variância	2,3727	0,1107	0,7657	2,09E-04	8,53E-08
Vies	-0,0671	0,1844	0,3596	-7,27E-04	4,93E-05	Vies	0,1813	0,0613	0,3250	-3,84E-04	1,73E-05
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						Kmenta	
				Primal						Dual	
				Aditivo						Dual Y	
Média	3,2789	0,4922	-0,4966	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,5866	0,6310	-0,2053	8,00E-01	4,53E-03
Variância	1,1032	0,0508	0,0705	6,34E-06	3,66E-09	Variância	0,1500	0,0147	184,6935	1,29E-06	2,00E-08
Vies	0,2789	-0,0078	0,0034	5,42E-05	4,69E-07	Vies	-0,4134	0,1310	0,2947	-1,26E-04	3,53E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Mult	
Média	2,9849	0,5068	-0,4929	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,8806	0,5650	-0,3870	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0524	0,0033	0,0036	2,15E-07	1,54E-10	Variância	0,6474	0,0478	0,1003	5,61E-06	3,25E-09
Vies	-0,0151	0,0068	0,0071	-1,54E-06	-5,45E-08	Vies	-0,1194	0,0650	0,1130	7,03E-06	2,09E-06
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						Dual II	
				Aditivo						Mult	
Média	2,9962	0,5018	-0,4982	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,8873	0,5632	-0,3842	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0138	0,0009	0,0009	7,61E-08	6,51E-11	Variância	0,6608	0,0490	0,1115	7,05E-06	5,58E-09
Vies	-0,0038	0,0018	0,0018	3,15E-06	5,32E-08	Vies	-0,1127	0,0632	0,1158	3,75E-05	1,81E-05
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				Kmenta						LM	
				Primal						Mult	
Média	2,7044	0,6835	-0,4419	9,00E-01	1,11E-03	Média	3,2199	0,5735	-0,1874	9,01E-01	1,07E-03
Variância	1,7581	0,0603	347,0845	1,13E-05	5,69E-08	Variância	6,8274	0,1071	2,2159	3,53E-04	4,47E-07
Vies	-0,2956	0,1835	0,0581	3,46E-05	1,14E-04	Vies	0,2199	0,0735	0,3126	1,14E-03	7,47E-05
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						Kmenta	
				Primal						Dual	
Média	3,0019	0,4998	-0,5001	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,5815	0,6235	-0,4549	9,00E-01	9,04E-03
Variância	0,0049	0,0002	0,0001	5,07E-09	7,43E-12	Variância	0,0403	0,0027	0,0121	7,89E-08	1,97E-08
Vies	0,0019	-0,0002	-0,0001	4,76E-07	3,49E-08	Vies	-0,4185	0,1235	0,0451	-7,10E-05	8,04E-03
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Dual Y	
Média	2,9928	0,5018	-0,4980	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9227	0,5470	-0,4327	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0067	0,0005	0,0006	1,47E-07	5,42E-11	Variância	0,6373	0,0345	0,0541	1,59E-06	5,58E-09
Vies	-0,0072	0,0018	0,0020	5,17E-07	1,04E-07	Vies	-0,0773	0,0470	0,0673	2,18E-05	4,13E-06
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
				LM						LM	
				Dual II						Dual II	
Média	2,9993	0,5002	-0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9941	0,5179	-0,4781	9,00E-01	1,05E-03
Variância	0,0010	0,0001	0,0001	1,91E-07	6,52E-11	Variância	0,3541	0,0179	0,0224	1,93E-06	1,47E-08
Vies	-0,0007	0,0002	0,0002	3,70E-06	3,35E-08	Vies	-0,0059	0,0179	0,0219	7,47E-06	4,83E-05

Tabela 19 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Primal	
Média	3,1650	0,5138	1,5173	7,99E-01	9,78E-04	Média	2,9263	0,5423	0,4619	7,99E-01	9,86E-04
Variância	1,4765	0,2239	34140,2707	3,53E-05	5,09E-08	Variância	0,7971	1,1145	1,7763	1,46E-04	1,28E-07
Viés	0,1650	0,0138	1,4173	-8,36E-04	-2,25E-05	Viés	-0,0737	0,0423	0,3619	-1,40E-03	-1,45E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0802	0,4821	0,0617	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0425	0,5100	0,9424	8,00E-01	2,81E-03
Variância	0,2336	0,0359	0,1960	6,35E-06	5,81E-09	Variância	3,6162	0,0237	825,7881	1,27E-06	1,96E-08
Viés	0,0802	-0,0179	-0,0383	-2,86E-05	3,20E-06	Viés	0,0425	0,0100	0,8424	4,28E-05	1,81E-03
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	2,9891	0,5062	0,1150	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,8800	0,5583	0,3200	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0163	0,0038	0,0211	2,30E-07	5,95E-10	Variância	0,1845	0,0391	0,4042	4,36E-06	1,01E-08
Viés	-0,0109	0,0062	0,0150	3,73E-06	1,78E-06	Viés	-0,1200	0,0583	0,2200	2,40E-05	2,79E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual II	
Média	3,0009	0,4996	0,0992	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0144	0,4957	0,0897	8,00E-01	1,04E-03
Variância	0,0012	0,0003	0,0015	8,47E-08	5,66E-10	Variância	0,0561	0,0118	0,0681	5,82E-06	2,67E-08
Viés	0,0009	-0,0004	-0,0008	3,85E-06	4,97E-07	Viés	0,0144	-0,0043	-0,0103	1,25E-04	4,22E-05
Verdadeiro	3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Primal	
Média	3,0399	0,5086	-0,0363	9,00E-01	9,33E-04	Média	2,9772	0,5311	0,4142	8,99E-01	1,07E-03
Variância	0,4925	0,0516	1667,0037	9,59E-06	1,36E-07	Variância	1,2584	0,1089	1,6369	1,71E-04	1,14E-06
Viés	0,0399	0,0086	-0,1363	-1,36E-04	-6,72E-05	Viés	-0,0228	0,0311	0,3142	-1,33E-03	7,31E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0000	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0046	0,5055	0,1643	9,00E-01	5,00E-03
Variância	0,0002	0,0000	0,0001	6,61E-09	2,05E-11	Variância	0,5669	0,0050	35,8162	7,94E-08	1,92E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-7,18E-07	-6,96E-08	Viés	0,0046	0,0055	0,0643	2,01E-05	4,00E-03
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	3,0000	0,5000	0,0999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,8750	0,5581	0,2893	9,00E-01	1,10E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,19E-11	1,26E-12	Variância	0,1874	0,0344	0,2908	1,04E-06	4,18E-08
Viés	0,0000	0,0000	-0,0001	-5,14E-08	-1,11E-08	Viés	-0,1250	0,0581	0,1893	4,81E-05	9,99E-05
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual II	
Média	2,9996	0,5002	0,1004	9,00E-01	9,96E-04	Média	2,9809	0,5102	0,1271	9,00E-01	9,93E-04
Variância	0,0006	0,0001	0,0004	5,38E-07	3,59E-09	Variância	0,0286	0,0055	0,0327	2,90E-06	1,19E-08
Viés	-0,0004	0,0002	0,0004	-4,29E-05	-3,53E-06	Viés	-0,0191	0,0102	0,0271	-3,67E-06	-6,69E-06

Tabela 20 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Primal	
Média	3,0684	0,4997	1,4472	8,00E-01	8,30E-04	Média	2,8613	0,5385	0,9269	7,99E-01	8,59E-04
Variância	0,8155	0,2276	5099,7078	3,72E-05	7,01E-08	Variância	0,5066	0,1198	3,6120	1,46E-04	1,79E-07
Vies	0,0684	-0,0003	0,9472	2,28E-04	-1,70E-04	Vies	-0,1387	0,0385	0,4269	-8,00E-04	-1,41E-04
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
Média	3,0523	0,4785	0,4375	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,2433	0,4526	1,3685	8,00E-01	2,28E-03
Variância	0,1324	0,0371	0,3565	5,08E-06	6,98E-09	Variância	22,9274	0,0376	411,9376	1,28E-06	1,94E-08
Vies	0,0523	-0,0215	-0,0625	-4,19E-05	7,83E-07	Vies	0,2433	-0,0474	0,8685	1,11E-04	1,28E-03
	N = 100			LM			N = 100			LM	
Média	2,9830	0,5118	0,5408	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,8610	0,5786	0,9525	8,00E-01	1,07E-03
Variância	0,0153	0,0067	0,0739	1,83E-07	1,39E-09	Variância	0,1644	0,0578	1,2265	4,30E-06	2,78E-08
Vies	-0,0170	0,0118	0,0408	1,52E-07	5,34E-06	Vies	-0,1390	0,0786	0,4525	2,99E-05	6,80E-05
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	3,0010	0,4994	0,4981	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0362	0,4764	0,4226	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0003	0,0001	0,0016	8,31E-08	7,46E-10	Variância	0,0248	0,0095	0,1068	5,56E-06	3,58E-08
Vies	0,0010	-0,0006	-0,0019	-1,76E-07	2,75E-07	Vies	0,0362	-0,0236	-0,0774	8,91E-05	2,90E-05
Verdadeiro	3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Primal	
Média	2,9405	0,5166	0,5016	9,00E-01	5,48E-04	Média	2,9650	0,5065	0,8086	8,97E-01	9,64E-04
Variância	0,2466	0,0439	147,3287	1,02E-05	2,14E-07	Variância	0,6715	0,0992	2,6683	1,76E-04	1,28E-06
Vies	-0,0595	0,0166	0,0016	4,84E-04	-4,52E-04	Vies	-0,0350	0,0065	0,3086	-2,62E-03	-3,59E-05
	N = 100			Modelo			N = 100			Modelo	
Média	3,0001	0,5000	0,4999	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0409	0,4852	0,3734	9,00E-01	3,65E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0000	3,73E-09	1,87E-11	Variância	0,0418	0,0094	5,0896	7,87E-08	1,86E-08
Vies	0,0001	0,0000	-0,0001	4,70E-07	5,37E-08	Vies	0,0409	-0,0148	-0,1266	7,89E-05	2,65E-03
	N = 100			Dual Y			N = 100			Dual Y	
Média	3,0001	0,4999	0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9525	0,5305	0,6501	9,00E-01	1,14E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	4,23E-11	8,02E-12	Variância	0,1215	0,0397	0,5537	1,08E-06	1,02E-07
Vies	0,0001	-0,0001	-0,0002	1,44E-07	-6,04E-08	Vies	-0,0475	0,0305	0,1501	1,34E-04	1,36E-04
	N = 100			LM			N = 100			LM	
Média	2,9975	0,5008	0,5012	9,00E-01	9,97E-04	Média	2,9873	0,5085	0,5348	9,00E-01	9,97E-04
Variância	0,0021	0,0002	0,0008	8,69E-07	3,09E-09	Variância	0,0134	0,0050	0,0669	3,05E-06	9,37E-09
Vies	-0,0025	0,0008	0,0012	-5,16E-05	-3,10E-06	Vies	-0,0127	0,0085	0,0348	-3,62E-05	-3,21E-06

Tabela 21 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Mult	
Média	2,9781	0,4980	2,3183	8,01E-01	6,08E-04	Média	2,8218	0,5412	1,3290	8,00E-01	6,72E-04
Variância	0,4248	0,2007	45286,9512	3,78E-05	9,45E-08	Variância	0,2982	0,1118	5,9240	1,47E-04	2,10E-07
Viés	-0,0219	-0,0020	1,3183	1,34E-03	-3,92E-04	Viés	-0,1782	0,0412	0,3290	-4,26E-05	-3,28E-04
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0252	0,4825	0,9265	8,00E-01	9,93E-04	Média	3,5071	0,3762	1,7486	8,00E-01	1,93E-03
Variância	0,0818	0,0399	0,6408	4,43E-06	9,50E-09	Variância	343,1738	0,0380	1247,2390	1,28E-06	1,92E-08
Viés	0,0252	-0,0175	-0,0735	-1,03E-05	-6,66E-06	Viés	0,5071	-0,1238	0,7486	1,39E-04	9,32E-04
	N = 100			Dual Y			N = 100			Mult	
Média	2,9824	0,5155	1,0747	8,00E-01	1,01E-03	Média	2,8784	0,5803	1,6860	8,00E-01	1,09E-03
Variância	0,0128	0,0102	0,2091	1,58E-07	3,20E-09	Variância	0,1254	0,0731	2,8391	4,34E-06	4,57E-08
Viés	-0,0176	0,0155	0,0747	4,47E-06	1,05E-05	Viés	-0,1216	0,0803	0,6860	4,54E-05	9,34E-05
	N = 100			Dual II			N = 100			Mult	
Média	3,0006	0,4994	0,9980	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0351	0,4679	0,8659	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0001	0,0001	0,0016	7,40E-08	6,74E-10	Variância	0,0125	0,0084	0,1869	5,64E-06	4,28E-08
Viés	0,0006	-0,0006	-0,0020	-7,85E-06	1,93E-07	Viés	0,0351	-0,0321	-0,1341	1,96E-05	1,56E-05
Verdadeiro	3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Primal			N = 100			Mult	
Média	2,8855	0,5173	0,6347	9,01E-01	-4,03E-05	Média	2,9333	0,4898	1,2362	8,97E-01	6,77E-04
Variância	0,1304	0,0358	544,4100	1,00E-05	3,23E-07	Variância	0,3327	0,0833	3,8762	1,93E-04	9,70E-07
Viés	-0,1145	0,0173	-0,3653	1,21E-03	-1,04E-03	Viés	-0,0667	-0,0102	0,2362	-3,28E-03	-3,23E-04
	N = 100			Aditivo			N = 100			Dual	
Média	3,0001	0,5000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,5427	0,4402	1,8940	9,00E-01	2,74E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	2,57E-09	2,30E-11	Variância	1781,7564	0,0138	15220,9930	7,80E-08	1,89E-08
Viés	0,0001	0,0000	0,0000	-2,88E-07	1,06E-07	Viés	0,5427	-0,0598	0,8940	1,10E-04	1,74E-03
	N = 100			Dual Y			N = 100			Mult	
Média	3,0000	0,5000	0,9999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9776	0,5169	1,1361	9,00E-01	1,14E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	2,62E-11	1,01E-11	Variância	0,0815	0,0466	1,1703	1,12E-06	1,65E-07
Viés	0,0000	0,0000	-0,0001	1,99E-08	-3,93E-08	Viés	-0,0224	0,0169	0,1361	1,32E-04	1,36E-04
	N = 100			Dual II			N = 100			Mult	
Média	3,0007	0,5001	0,9997	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9914	0,5033	1,0193	9,00E-01	9,92E-04
Variância	0,0075	0,0002	0,0008	6,72E-04	8,34E-10	Variância	0,0077	0,0033	0,0938	6,59E-06	1,24E-08
Viés	0,0007	0,0001	-0,0003	3,47E-04	1,36E-07	Viés	-0,0086	0,0033	0,0193	-1,62E-04	-7,68E-06

Tabela 22 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Mult				
Média	71,2358	1,0031	0,0307	8,00E-01	1,06E-03	Média	4,2144	0,8344	0,2466	8,02E-01	1,04E-03
Variância	3,9397E+05	0,6011	177,8439	4,27E-05	3,81E-08	Variância	5,6893	0,0350	25,0033	2,40E-04	9,98E-08
Viés	68,2358	0,1031	0,5307	-2,71E-04	5,77E-05	Viés	1,2144	-0,0656	0,7466	1,79E-03	3,82E-05
	N = 100 Modelo LM Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,7544	0,8033	0,1375	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,8371	0,6670	0,1741	8,00E-01	4,99E-03
Variância	2,0941	0,0323	16,5355	5,84E-06	3,55E-09	Variância	7,6205	0,0645	88,9103	1,29E-06	1,90E-08
Viés	0,7544	-0,0967	0,6375	3,41E-04	3,40E-06	Viés	0,8371	-0,2330	0,6741	-1,44E-05	3,99E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Mult				
Média	3,8027	0,7707	-0,5276	8,01E-01	1,04E-03	Média	3,7010	0,7979	-0,4558	8,01E-01	1,04E-03
Variância	3,0435	0,0594	0,4073	5,72E-05	7,97E-08	Variância	3,4890	0,0608	0,2275	8,13E-05	9,36E-08
Viés	0,8027	-0,1293	-0,0276	6,14E-04	3,63E-05	Viés	0,7010	-0,1021	0,0442	1,12E-03	4,01E-05
	N = 100 Modelo LM Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,5166	0,8109	-0,4959	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,7509	0,7959	-0,4570	8,01E-01	1,04E-03
Variância	1,5019	0,0394	0,4232	1,46E-05	2,42E-08	Variância	3,7837	0,0617	0,5446	9,20E-05	1,39E-07
Viés	0,5166	-0,0891	0,0041	5,01E-05	7,07E-06	Viés	0,7509	-0,1041	0,0430	6,84E-04	3,54E-05
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Mult				
Média	24,2234	0,9492	-0,0300	9,00E-01	1,15E-03	Média	17,4772	0,8487	1,0846	9,03E-01	1,20E-03
Variância	2,7749E+04	0,2701	132,5793	1,26E-05	6,20E-08	Variância	1,3523E+04	0,0446	36,8642	6,65E-04	1,53E-06
Viés	21,2234	0,0492	0,4700	4,41E-04	1,45E-04	Viés	14,4772	-0,0513	1,5846	2,73E-03	1,96E-04
	N = 100 Modelo LM Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	4,0797	0,7520	0,1652	9,00E-01	9,90E-04	Média	3,6197	0,7132	-0,0236	9,00E-01	9,99E-03
Variância	3,8485	0,0448	16,1602	5,24E-06	2,04E-09	Variância	0,3444	0,0745	5,2509	7,76E-08	1,91E-08
Viés	1,0797	-0,1480	0,6652	4,10E-04	-9,51E-06	Viés	0,6197	-0,1868	0,4764	-1,18E-06	8,99E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Mult				
Média	2,7417	0,9545	-0,4076	8,99E-01	1,13E-03	Média	3,0170	0,9108	-0,3961	8,99E-01	1,14E-03
Variância	0,1913	0,0023	0,0493	1,33E-04	2,84E-07	Variância	1,0959	0,0252	0,1737	1,46E-04	3,12E-07
Viés	-0,2583	0,0545	0,0924	-8,91E-04	1,26E-04	Viés	0,0170	0,0108	0,1039	-6,54E-04	1,36E-04
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,7903	0,9442	-0,4963	8,99E-01	1,11E-03	Média	3,0317	0,9041	-0,4614	8,99E-01	1,15E-03
Variância	0,1528	0,0027	0,0534	1,19E-04	2,28E-07	Variância	0,8967	0,0231	0,1739	1,24E-04	2,69E-07
Viés	-0,2097	0,0442	0,0037	-1,29E-03	1,14E-04	Viés	0,0317	0,0041	0,0386	-8,47E-04	1,46E-04

Tabela 23 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			Modelo			Mult	
	N = 100			Kmenta			N = 100			LM	
Média	12,4317	0,8255	-0,2614	8,00E-01	1,20E-03	Média	5,7142	0,6123	0,5549	8,01E-01	1,12E-03
Variância	1180,3034	0,9826	85,5797	4,02E-05	5,31E-08	Variância	12,4141	0,1334	17,1627	2,22E-04	1,50E-07
Viés	9,4317	-0,0745	-0,3614	6,55E-05	1,97E-04	Viés	2,7142	-0,2877	0,4549	5,61E-04	1,22E-04
	N = 100			Primal			N = 100			Dual	
Média	4,3931	0,7058	0,4281	8,00E-01	9,84E-04	Média	3,5686	0,6736	1,2271	8,00E-01	4,43E-03
Variância	5,0528	0,0858	13,1036	9,87E-06	1,66E-08	Variância	1,0520	0,0534	500,9949	1,27E-06	1,97E-08
Viés	1,3931	-0,1942	0,3281	-3,47E-04	-1,64E-05	Viés	0,5686	-0,2264	1,1271	1,61E-05	3,43E-03
	N = 100			LM			N = 100			Dual Y	
Média	3,0411	0,8884	0,1328	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,4768	0,8071	0,1525	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,1379	0,0052	0,0513	2,09E-07	1,97E-10	Variância	1,3630	0,0421	0,5013	9,76E-06	5,03E-09
Viés	0,0411	-0,0116	0,0328	5,84E-07	1,26E-06	Viés	0,4768	-0,0929	0,0525	3,48E-05	3,93E-06
	N = 100			LM			N = 100			Dual II	
Média	3,0157	0,8959	0,1040	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,4428	0,8126	0,1542	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0329	0,0013	0,0109	7,80E-08	3,53E-10	Variância	1,3549	0,0410	0,2676	1,16E-05	1,51E-08
Viés	0,0157	-0,0041	0,0040	1,02E-06	1,35E-06	Viés	0,4428	-0,0874	0,0542	1,09E-04	3,42E-05
Verdadeiro	3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100			Kmenta			N = 100			Primal	
Média	5,7920	0,7864	-0,1227	9,01E-01	1,46E-03	Média	6,8096	0,6279	0,5231	9,02E-01	1,28E-03
Variância	39,0765	0,2061	369,4160	1,12E-05	1,47E-07	Variância	44,4797	0,1454	10,7365	4,05E-04	1,01E-06
Viés	2,7920	-0,1136	-0,2227	5,33E-04	4,61E-04	Viés	3,8096	-0,2721	0,4231	2,28E-03	2,78E-04
	N = 100			Primal			N = 100			Dual	
Média	3,0021	0,8997	0,0997	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,3799	0,7622	3,2857	9,00E-01	8,70E-03
Variância	0,0019	0,0000	0,0003	4,94E-09	2,05E-11	Variância	0,2335	0,0494	5877,6589	7,77E-08	1,89E-08
Viés	0,0021	-0,0003	-0,0003	5,42E-07	8,68E-08	Viés	0,3799	-0,1378	3,1857	9,32E-06	7,70E-03
	N = 100			LM			N = 100			Dual Y	
Média	2,9621	0,9064	0,1228	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1803	0,8667	0,2034	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0077	0,0002	0,0030	1,95E-07	8,91E-11	Variância	0,9228	0,0213	0,1847	2,24E-06	5,43E-09
Viés	-0,0379	0,0064	0,0228	-1,04E-05	1,80E-06	Viés	0,1803	-0,0333	0,1034	9,10E-05	1,14E-05
	N = 100			LM			N = 100			Dual II	
Média	3,0001	0,9000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0878	0,8839	0,0712	9,00E-01	9,90E-04
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,26E-11	5,20E-12	Variância	0,0690	0,0020	0,0099	2,91E-06	2,02E-08
Viés	0,0001	0,0000	0,0000	1,46E-08	3,68E-08	Viés	0,0878	-0,0161	-0,0288	2,23E-05	-1,04E-05

Tabela 24 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	6,2448	0,8738	-0,2203	7,99E-01	1,16E-03	Média	4,7895	0,6295	0,7977	7,99E-01	1,10E-03
Variância	100,1801	0,8819	1119,7772	3,75E-05	6,43E-08	Variância	7,0925	0,1387	17,6642	1,77E-04	2,01E-07
Vies	3,2448	-0,0262	-0,7203	-7,16E-04	1,60E-04	Vies	1,7895	-0,2705	0,2977	-7,38E-04	1,01E-04
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,7245	0,7623	0,6882	8,00E-01	9,63E-04	Média	4,0542	0,6241	10,3302	8,00E-01	3,68E-03
Variância	2,1538	0,0595	10,0430	9,25E-06	5,93E-08	Variância	304,4687	0,0617	376260,7277	1,28E-06	2,01E-08
Vies	0,7245	-0,1377	0,1882	-3,14E-04	-3,66E-05	Vies	1,0542	-0,2759	9,8302	1,14E-04	2,68E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0201	0,8914	0,5308	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,2238	0,8370	0,5690	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0841	0,0037	0,0653	2,29E-07	5,26E-10	Variância	0,6137	0,0270	0,3627	7,58E-06	6,50E-09
Vies	0,0201	-0,0086	0,0308	-1,96E-06	2,85E-06	Vies	0,2238	-0,0630	0,0690	4,06E-06	9,85E-06
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0042	0,8989	0,4978	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,2689	0,8354	0,4027	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0028	0,0001	0,0018	7,97E-08	6,45E-10	Variância	0,4074	0,0191	0,1264	7,20E-06	3,01E-08
Vies	0,0042	-0,0011	-0,0022	2,35E-06	2,83E-07	Vies	0,2689	-0,0646	-0,0973	2,85E-05	2,04E-05
Verdadeiro	3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,7627	0,9137	4,4303	9,00E-01	1,30E-03	Média	5,3666	0,6614	0,5936	9,00E-01	1,29E-03
Variância	5,0706	0,1462	194050,0667	9,96E-06	2,04E-07	Variância	18,9737	0,1422	2,2263	3,21E-04	1,34E-06
Vies	0,7627	0,0137	3,9303	-5,87E-05	3,04E-04	Vies	2,3666	-0,2386	0,0936	-3,84E-04	2,92E-04
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0005	0,8999	0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,7395	0,6840	7,3972	9,00E-01	6,78E-03
Variância	0,0004	0,0000	0,0001	5,86E-09	4,17E-11	Variância	9,9167	0,0693	17003,1078	8,05E-08	1,95E-08
Vies	0,0005	-0,0001	-0,0002	9,39E-08	2,43E-08	Vies	0,7395	-0,2160	6,8972	8,31E-05	5,78E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,9000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1480	0,8608	0,5751	9,00E-01	1,04E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,42E-11	8,29E-13	Variância	0,4903	0,0159	0,2668	1,39E-06	1,21E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,33E-08	6,44E-09	Vies	0,1480	-0,0392	0,0751	2,49E-05	3,73E-05
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9992	0,9005	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9807	0,9017	0,5337	9,00E-01	9,90E-04
Variância	0,0075	0,0007	0,0002	6,71E-04	8,42E-10	Variância	0,0385	0,0013	0,0255	3,53E-06	3,90E-09
Vies	-0,0008	0,0005	0,0000	-3,84E-04	-6,49E-08	Vies	-0,0193	0,0017	0,0337	4,16E-05	-9,82E-06

Tabela 25 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Mult				
Média	4,2276	0,9210	0,0335	7,99E-01	9,73E-04	Média	4,0500	0,6397	0,9681	7,98E-01	9,33E-04
Variância	15,5994	0,7266	1474,1014	3,68E-05	8,69E-08	Variância	3,4953	0,1386	3,3096	1,58E-04	2,40E-07
Viés	1,2276	0,0210	-0,9665	-7,43E-04	-2,67E-05	Viés	1,0500	-0,2603	-0,0319	-1,64E-03	-6,68E-05
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,4513	0,7825	0,8830	8,00E-01	9,90E-04	Média	4,4201	0,5674	5,1472	8,00E-01	2,90E-03
Variância	1,0183	0,0486	0,8011	8,59E-06	3,30E-08	Variância	128,7570	0,0732	6434,7278	1,26E-06	1,94E-08
Viés	0,4513	-0,1175	-0,1170	-2,38E-04	-1,04E-05	Viés	1,4201	-0,3326	4,1472	2,04E-04	1,90E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0249	0,8875	1,0295	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,1713	0,8316	1,0747	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0725	0,0045	0,1270	2,31E-07	1,67E-09	Variância	0,4249	0,0283	0,6474	4,51E-06	1,15E-08
Viés	0,0249	-0,0125	0,0295	7,75E-06	5,28E-06	Viés	0,1713	-0,0684	0,0747	3,85E-05	1,76E-05
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,001034509	0,899712758	0,998930218	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,124779241	0,863511162	0,891798036	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,000334523	1,96568E-05	0,000620714	8,27E-08	6,73E-10	Variância	0,100980894	0,007543111	0,089148347	6,07E-06	4,07E-08
Viés	0,001034509	-0,000287242	-0,001069782	-4,29E-06	9,58E-08	Viés	0,124779241	-0,03648838	-0,108201964	7,90E-06	-4,70E-07
Verdadeiro	3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 100 Modelo Kmenta Primal						N = 100 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,1088	0,9848	-16,0193	9,00E-01	7,34E-04	Média	3,9460	0,7541	1,1629	8,97E-01	1,04E-03
Variância	1,4014	0,1027	2138026,1048	9,96E-06	2,94E-07	Variância	6,7092	0,1067	2,2290	2,45E-04	1,56E-06
Viés	0,1088	0,0848	-17,0193	2,06E-05	-2,66E-04	Viés	0,9460	-0,1459	0,1629	-2,95E-03	4,33E-05
	N = 100 Modelo LM Primal Aditivo						N = 100 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0003	0,9000	0,9999	9,00E-01	1,00E-03	Média	5,8950	0,6234	12,0210	9,00E-01	4,74E-03
Variância	0,0002	0,0000	0,0001	6,59E-09	6,74E-11	Variância	15295,1816	0,0772	239402,0980	7,87E-08	1,97E-08
Viés	0,0003	0,0000	-0,0001	-1,27E-06	8,80E-08	Viés	2,8950	-0,2766	11,0210	1,63E-04	3,74E-03
	N = 100 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,9000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1436	0,8510	1,0452	9,00E-01	1,09E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,65E-11	2,47E-12	Variância	0,3656	0,0190	0,4282	1,18E-06	5,42E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-1,36E-07	1,94E-09	Viés	0,1436	-0,0490	0,0452	5,83E-05	8,54E-05
	N = 100 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 100 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9999	0,9004	1,0003	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0075	0,8964	1,0113	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0074	0,0007	0,0008	6,79E-04	8,40E-10	Variância	0,0249	0,0013	0,0403	2,52E-06	3,04E-09
Viés	-0,0001	0,0004	0,0003	-4,01E-04	4,85E-07	Viés	0,0075	-0,0036	0,0113	-2,66E-05	2,07E-06

Tabela 26 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo						N = 250 Modelo				
Média	3,0340	0,1168	-0,4497	8,01E-01	9,33E-04		3,0351	0,1100	-0,3118	8,01E-01	9,47E-04
Variância	0,0036	0,0002	0,0799	1,69E-05	6,20E-09		0,0124	0,0008	0,5137	9,46E-05	2,01E-08
Vies	0,0340	0,0168	0,0503	9,10E-04	-6,66E-05		0,0351	0,0100	0,1882	8,33E-04	-5,30E-05
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0002	0,1001	-0,5015	8,00E-01	1,00E-03		3,0151	0,1040	-0,7511	8,00E-01	1,41E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0034	7,24E-07	1,82E-10		0,0120	0,0002	5,7758	5,35E-07	1,22E-09
Vies	0,0002	0,0001	-0,0015	8,46E-06	-4,16E-07		0,0151	0,0040	-0,2511	-1,45E-04	4,10E-04
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,1000	-0,4989	8,00E-01	1,00E-03		2,9950	0,0949	-0,2533	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0004	2,64E-08	4,35E-11		0,0004	0,0003	1,5821	2,49E-06	6,42E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0011	-1,34E-06	7,40E-08		-0,0050	-0,0051	0,2467	-2,02E-05	2,60E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0000	0,1000	-0,4999	8,00E-01	1,00E-03		2,9930	0,0983	-0,4432	8,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	9,46E-09	2,15E-11		0,0012	0,0003	0,2008	4,09E-06	5,34E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0001	1,33E-08	8,37E-08		-0,0070	-0,0017	0,0568	-4,51E-05	1,85E-05
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,0406	0,1170	-0,5697	9,01E-01	8,43E-04		3,0609	0,1209	-0,3720	9,02E-01	8,75E-04
Variância	0,0030	0,0002	0,0234	4,32E-06	1,85E-08		0,0278	0,0032	0,2131	1,80E-04	2,14E-07
Vies	0,0406	0,0170	-0,0697	9,08E-04	-1,57E-04		0,0609	0,0209	0,1280	2,22E-03	-1,25E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03		3,0148	0,1063	-0,7692	9,00E-01	2,23E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	7,47E-11	1,02E-13		0,0020	0,0000	0,0325	3,42E-08	1,24E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-8,97E-08	3,01E-09		0,0148	0,0063	-0,2692	-1,24E-04	1,23E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9987	0,0991	-0,4772	9,00E-01	1,01E-03		2,9933	0,0962	-0,3141	9,00E-01	1,09E-03
Variância	0,0001	0,0001	0,0416	9,76E-09	1,35E-08		0,0007	0,0003	0,9928	1,12E-06	5,53E-08
Vies	-0,0013	-0,0009	0,0228	-1,11E-05	1,30E-05		-0,0067	-0,0038	0,1859	3,12E-05	8,54E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9998	0,0999	-0,4985	9,00E-01	1,00E-03		2,9858	0,0953	-0,4621	9,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0051	2,84E-09	4,75E-11		0,0020	0,0005	0,0480	1,31E-06	2,72E-09
Vies	-0,0002	-0,0001	0,0015	5,65E-07	1,23E-07		-0,0142	-0,0047	0,0379	8,81E-06	1,55E-05

Tabela 27 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03						
	N = 250			Modelo		Kmenta		LM		Primal	
Média	3,0844	0,1688	0,0122	8,03E-01	7,09E-04		3,0951	0,1676	0,2579	8,04E-01	7,27E-04
Variância	0,0033	0,0011	0,1651	1,59E-05	1,72E-08		0,0119	0,0039	2,8091	8,99E-05	5,76E-08
Vies	0,0844	0,0688	-0,0878	3,20E-03	-2,91E-04		0,0951	0,0676	0,1579	4,16E-03	-2,73E-04
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual	
Média	3,0009	0,1004	0,0949	8,00E-01	9,98E-04		3,1103	0,1117	1,7008	8,00E-01	1,39E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0125	7,57E-07	5,91E-10		1,5820	0,0096	1090,1335	5,41E-07	1,21E-09
Vies	0,0009	0,0004	-0,0051	5,70E-05	-2,27E-06		0,1103	0,0117	1,6008	1,54E-05	3,88E-04
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual Y	
Média	2,9999	0,0999	0,1054	8,00E-01	1,00E-03		2,9936	0,0915	1,4174	8,00E-01	1,05E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0063	2,79E-08	1,88E-10		0,0004	0,0008	30,5870	2,43E-06	1,80E-08
Vies	-0,0001	-0,0001	0,0054	1,27E-06	8,96E-07		-0,0064	-0,0085	1,3174	5,41E-05	5,21E-05
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual II	
Média	3,0000	0,1000	0,0999	8,00E-01	1,00E-03		2,9937	0,0978	0,1866	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	1,05E-08	3,32E-11		0,0014	0,0005	0,5054	3,95E-06	7,56E-09
Vies	0,0000	0,0000	-0,0001	-7,57E-08	-3,90E-08		-0,0063	-0,0022	0,0866	1,74E-05	6,70E-06
Verdadeiro	3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250			Modelo		Kmenta		LM		Primal	
Média	3,0995	0,1734	0,0560	9,02E-01	3,26E-04		3,0774	0,1663	0,4152	9,04E-01	5,58E-04
Variância	0,0030	0,0009	0,0093	4,31E-06	6,43E-08		0,0202	0,0097	7,8816	2,27E-04	3,54E-07
Vies	0,0995	0,0734	-0,0440	2,25E-03	-6,74E-04		0,0774	0,0663	0,3152	3,54E-03	-4,42E-04
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual	
Média	3,0000	0,1000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03		3,0083	0,0978	0,1994	9,00E-01	1,83E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,69E-11	3,19E-13		0,0283	0,0006	7,4480	3,29E-08	1,23E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	1,31E-08	-2,61E-09		0,0083	-0,0022	0,0994	1,19E-05	8,25E-04
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual Y	
Média	3,0000	0,1000	0,1012	9,00E-01	1,00E-03		2,9923	0,0928	1,5199	9,00E-01	1,11E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0021	5,72E-11	5,34E-10		0,0009	0,0011	24,6254	1,27E-06	1,30E-07
Vies	0,0000	0,0000	0,0012	-9,30E-08	6,25E-07		-0,0077	-0,0072	1,4199	1,71E-04	1,11E-04
	N = 250			Modelo		LM		Modelo		Dual II	
Média	3,0008	0,1000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03		2,9995	0,1002	0,1005	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0000	0,0000	6,70E-04	8,31E-10		0,0003	0,0001	0,0010	9,26E-07	1,08E-09
Vies	0,0008	0,0000	0,0000	-1,68E-06	9,94E-09		-0,0005	0,0002	0,0005	6,84E-05	-1,07E-07

Tabela 28 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,1085	0,2157	0,1891	8,04E-01	5,13E-04	Média	3,1232	0,2188	0,5586	8,06E-01	5,31E-04
Variancia	0,0031	0,0018	0,1032	1,49E-05	2,58E-08	Variancia	0,0107	0,0064	7,0757	8,63E-05	8,41E-08
Vies	0,1085	0,1157	-0,3109	4,27E-03	-4,87E-04	Vies	0,1232	0,1188	0,0586	5,67E-03	-4,69E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0013	0,1011	0,4958	8,00E-01	9,95E-04	Média	3,1341	0,1213	1,5093	8,00E-01	1,33E-03
Variancia	0,0001	0,0001	0,0223	7,29E-07	9,69E-10	Variancia	1,9120	0,0147	394,4200	5,39E-07	1,24E-09
Vies	0,0013	0,0011	-0,0042	7,31E-05	-4,60E-06	Vies	0,1341	0,0213	1,0093	6,06E-05	3,33E-04
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9998	0,0997	0,5127	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9942	0,0901	2,7024	8,00E-01	1,04E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0191	2,69E-08	4,69E-10	Variancia	0,0004	0,0010	76,9077	2,46E-06	2,05E-08
Vies	-0,0002	-0,0003	0,0127	2,20E-07	1,91E-06	Vies	-0,0058	-0,0099	2,2024	8,80E-05	4,33E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0000	0,1000	0,4999	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9909	0,0953	0,6837	8,00E-01	1,01E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0002	9,51E-09	2,87E-11	Variancia	0,0015	0,0008	0,9313	3,64E-06	8,25E-09
Vies	0,0000	0,0000	-0,0001	1,63E-07	1,66E-08	Vies	-0,0091	-0,0047	0,1837	5,76E-05	1,00E-05
Verdadeiro	3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	3,1306	0,2228	0,1733	9,03E-01	-1,67E-04	Média	3,0732	0,1956	0,9793	9,03E-01	3,87E-04
Variancia	0,0029	0,0014	0,0062	4,10E-06	1,00E-07	Variancia	0,0204	0,0100	17,3890	2,48E-04	2,78E-07
Vies	0,1306	0,1228	-0,3267	2,96E-03	-1,17E-03	Vies	0,0732	0,0956	0,4793	3,24E-03	-6,13E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0539	0,0971	3,5379	9,00E-01	1,58E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	6,24E-11	5,44E-13	Variancia	6,5555	0,0027	79201,1013	3,34E-08	1,25E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,40E-07	9,33E-09	Vies	0,0539	-0,0029	3,0379	4,15E-05	5,75E-04
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9956	0,0921	2,7470	9,00E-01	1,03E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	6,77E-12	5,44E-12	Variancia	0,0007	0,0014	54,7538	1,17E-06	1,01E-07
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	9,57E-09	-1,90E-08	Vies	-0,0044	-0,0079	2,2470	2,10E-04	2,78E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9996	0,1000	0,4999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9994	0,1001	0,5018	9,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0074	0,0000	0,0002	6,75E-04	8,38E-10	Variancia	0,0002	0,0001	0,0067	8,30E-07	7,79E-10
Vies	-0,0004	0,0000	-0,0001	-3,15E-04	-3,46E-07	Vies	-0,0006	0,0001	0,0018	5,85E-05	1,66E-07

Tabela 29 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ	
Verdadeiro	3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03				1	8,00E-01	1,00E-03	
	N = 250			Modelo		Kmenta			LM		Primal Mult	
Média	3,1274	0,2735	0,2802	8,05E-01	2,64E-04	Média	3,1334	0,2752	0,6905	8,06E-01	3,18E-04	
Variância	0,0029	0,0025	0,0770	1,44E-05	3,34E-08	Variância	0,0084	0,0069	7,5773	7,85E-05	8,45E-08	
Vies	0,1274	0,1735	-0,7198	5,11E-03	-7,36E-04	Vies	0,1334	0,1752	-0,3095	6,38E-03	-6,82E-04	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual	
Média	3,0020	0,1024	0,9875	8,00E-01	9,90E-04	Média	3,1918	0,1336	3,1425	8,00E-01	1,27E-03	
Variância	0,0001	0,0001	0,0496	7,21E-07	1,68E-09	Variância	2,5649	0,0200	4688,3859	5,34E-07	1,26E-09	
Vies	0,0020	0,0024	-0,0125	1,00E-04	-9,50E-06	Vies	0,1918	0,0336	2,1425	7,90E-05	2,68E-04	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual Y Mult	
Média	2,9997	0,0993	1,0412	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9960	0,0911	4,2084	8,00E-01	1,02E-03	
Variância	0,0000	0,0000	0,0835	2,62E-08	1,16E-09	Variância	0,0003	0,0011	167,2121	2,38E-06	1,96E-08	
Vies	-0,0003	-0,0007	0,0412	1,19E-06	3,96E-06	Vies	-0,0040	-0,0089	3,2084	1,22E-04	1,93E-05	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual II Mult	
Média	3,0000	0,1000	1,0004	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9885	0,0933	1,3258	8,00E-01	1,02E-03	
Variância	0,0000	0,0000	0,0004	8,89E-09	2,58E-11	Variância	0,0015	0,0013	1,5912	3,35E-06	9,32E-09	
Vies	0,0000	0,0000	0,0004	-6,42E-07	1,59E-08	Vies	-0,0115	-0,0067	0,3258	9,88E-05	1,54E-05	
Verdadeiro	3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03				1	9,00E-01	1,00E-03	
	N = 250			Modelo		Kmenta			LM		Primal Mult	
Média	3,1568	0,2780	0,1907	9,03E-01	-7,82E-04	Média	3,0599	0,2118	1,4136	9,03E-01	2,69E-04	
Variância	0,0027	0,0019	0,0048	3,90E-06	1,39E-07	Variância	0,0231	0,0110	32,9484	2,54E-04	1,93E-07	
Vies	0,1568	0,1780	-0,8093	3,48E-03	-1,78E-03	Vies	0,0599	0,1118	0,4136	2,84E-03	-7,31E-04	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual	
Média	3,0000	0,1000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1289	0,1051	2,7120	9,00E-01	1,37E-03	
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,32E-11	7,25E-13	Variância	6,2614	0,0088	8874,4325	3,31E-08	1,23E-09	
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	1,35E-07	-1,93E-09	Vies	0,1289	0,0051	1,7120	5,46E-05	3,70E-04	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual Y Mult	
Média	3,0000	0,1000	0,9999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9984	0,0916	4,8470	9,00E-01	9,27E-04	
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	9,95E-12	1,34E-11	Variância	0,0006	0,0018	136,9719	1,16E-06	8,76E-08	
Vies	0,0000	0,0000	-0,0001	4,22E-08	-3,53E-08	Vies	-0,0016	-0,0084	3,8470	2,24E-04	-7,29E-05	
	N = 250			Modelo		LM			Modelo		Dual II Mult	
Média	3,0000	0,1000	0,9994	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9989	0,1002	1,0046	9,00E-01	1,00E-03	
Variância	0,0075	0,0000	0,0008	6,70E-04	8,31E-10	Variância	0,0002	0,0002	0,0156	1,68E-06	8,39E-10	
Vies	0,0000	0,0000	-0,0006	4,12E-04	-4,42E-07	Vies	-0,0011	0,0002	0,0046	4,97E-05	3,06E-07	

Tabela 30 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,4379	0,7075	-0,1850	7,99E-01	1,06E-03		3,0371	0,5948	-0,2723	7,98E-01	1,07E-03
Variância	0,2775	0,0150	0,9437	1,66E-05	4,99E-09		2,0945	0,0884	0,5598	9,11E-05	1,39E-08
Vies	-0,5621	0,2075	0,3150	-1,12E-03	6,30E-05		0,0371	0,0948	0,2277	-2,41E-03	6,75E-05
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0822	0,4919	-0,5068	8,00E-01	1,00E-03		2,5732	0,6330	-0,4534	8,00E-01	4,60E-03
Variância	0,1867	0,0080	0,0067	1,12E-06	2,37E-10		0,0606	0,0053	0,0257	5,38E-07	1,22E-09
Vies	0,0822	-0,0081	-0,0068	1,64E-05	1,42E-06		-0,4268	0,1330	0,0466	-1,41E-04	3,60E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9979	0,5010	-0,4990	8,00E-01	1,00E-03		2,9276	0,5350	-0,4516	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0084	0,0005	0,0005	3,78E-08	5,39E-12		0,3109	0,0226	0,0356	2,37E-06	2,55E-10
Vies	-0,0021	0,0010	0,0010	4,65E-07	5,37E-08		-0,0724	0,0350	0,0484	-2,59E-05	3,00E-06
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0006	0,5000	-0,5000	8,00E-01	1,00E-03		2,9693	0,5211	-0,4753	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0021	0,0001	0,0001	1,37E-08	1,18E-11		0,2632	0,0176	0,0223	3,55E-06	2,02E-09
Vies	0,0006	0,0000	0,0000	-1,82E-06	5,65E-08		-0,0307	0,0211	0,0247	-8,19E-06	1,28E-05
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	2,2218	0,7323	-0,1754	9,00E-01	1,14E-03		3,6458	0,5799	-0,2413	8,98E-01	1,18E-03
Variância	0,0855	0,0034	0,0014	4,77E-06	1,41E-08		7,5712	0,1133	1,1819	1,93E-04	1,71E-07
Vies	-0,7782	0,2323	0,3246	-1,32E-04	1,41E-04		0,6458	0,0799	0,2587	-1,58E-03	1,80E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0001	0,5000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03		2,5435	0,6272	-0,4510	9,00E-01	9,30E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0000	2,46E-10	3,09E-13		0,0142	0,0010	0,0042	3,36E-08	1,26E-09
Vies	0,0001	0,0000	0,0000	2,07E-08	1,27E-08		-0,4565	0,1272	0,0490	-8,30E-05	8,30E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9991	0,5002	-0,4997	9,00E-01	1,00E-03		2,9019	0,5456	-0,4358	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0010	0,0001	0,0001	1,23E-10	1,33E-12		0,5017	0,0294	0,0467	1,21E-06	6,03E-10
Vies	-0,0009	0,0002	0,0003	-2,93E-07	2,91E-08		-0,0981	0,0456	0,0642	-1,54E-06	8,94E-06
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9975	0,5000	-0,5007	9,00E-01	9,99E-04		3,0316	0,4942	-0,5072	9,00E-01	9,92E-04
Variância	0,0027	0,0000	0,0002	9,95E-07	2,39E-10		0,0399	0,0014	0,0012	3,22E-06	3,57E-09
Vies	-0,0025	0,0000	-0,0007	4,07E-05	-7,07E-07		0,0316	-0,0058	-0,0072	6,18E-05	-7,96E-06

Tabela 31 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo						N = 250 Modelo				
Média	2,9871	0,5054	0,1024	7,99E-01	9,71E-04	Média	3,0016	0,5094	0,1069	7,99E-01	9,74E-04
Variância	0,0952	0,0120	0,0538	1,46E-05	1,31E-08	Variância	0,2625	0,0294	0,0998	7,14E-05	3,63E-08
Vies	-0,0129	0,0054	0,0024	-8,16E-04	-2,94E-05	Vies	0,0016	0,0094	0,0069	-9,97E-04	-2,59E-05
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0118	0,4965	0,0948	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0000	0,5091	0,2155	8,00E-01	2,77E-03
Variância	0,0103	0,0012	0,0032	1,46E-06	1,01E-09	Variância	0,0915	0,0101	30,7985	5,32E-07	1,23E-09
Vies	0,0118	-0,0035	-0,0052	-3,10E-05	1,67E-06	Vies	0,0000	0,0091	0,1155	4,34E-05	1,77E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9993	0,5004	0,1010	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9823	0,5096	0,1221	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0016	0,0003	0,0016	5,48E-08	9,68E-11	Variância	0,0438	0,0088	0,0449	2,15E-06	2,67E-09
Vies	-0,0007	0,0004	0,0010	-3,17E-06	4,44E-07	Vies	-0,0177	0,0096	0,0221	2,73E-05	9,63E-06
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9992	0,5006	0,1019	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,35E-08	1,53E-11	Variância	0,0020	0,0004	0,0021	3,29E-06	1,85E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-8,63E-07	3,07E-08	Vies	-0,0008	0,0006	0,0019	-8,71E-06	-4,32E-07
Verdadeiro	3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	2,9632	0,5088	0,0983	9,00E-01	9,07E-04	Média	3,1019	0,4965	0,0929	9,00E-01	9,98E-04
Variância	0,0329	0,0021	0,0029	3,88E-06	4,83E-08	Variância	0,6478	0,0310	0,0492	1,20E-04	6,98E-07
Vies	-0,0368	0,0088	-0,0017	-1,02E-04	-9,32E-05	Vies	0,1019	-0,0035	-0,0071	-3,33E-04	-2,05E-06
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0234	0,4949	0,0820	9,00E-01	4,84E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,16E-10	2,58E-12	Variância	0,0074	0,0015	0,0058	3,32E-08	1,23E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,94E-07	6,79E-09	Vies	0,0234	-0,0051	-0,0180	3,44E-05	3,84E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9966	0,5015	0,1017	9,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,00E-12	8,34E-14	Variância	0,0296	0,0041	0,0186	8,85E-07	8,08E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,68E-08	-1,06E-09	Vies	-0,0034	0,0015	0,0017	-4,94E-06	1,67E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	2,9995	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9938	0,5025	0,1049	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0076	0,0002	0,0000	6,72E-04	8,35E-10	Variância	0,0132	0,0025	0,0114	1,56E-06	1,79E-09
Vies	-0,0005	0,0000	0,0000	1,89E-04	8,74E-08	Vies	-0,0062	0,0025	0,0049	1,15E-05	1,53E-06

Tabela 32 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	2,9275	0,5125	0,3966	8,01E-01	7,77E-04	Média	2,9005	0,5348	0,4516	8,01E-01	7,73E-04
Variancia	0,0513	0,0104	0,0609	1,50E-05	2,13E-08	Variancia	0,1558	0,0298	0,1597	7,30E-05	6,26E-08
Viés	-0,0725	0,0125	-0,1034	8,28E-04	-2,23E-04	Viés	-0,0995	0,0348	-0,0484	1,34E-03	-2,27E-04
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0056	0,4976	0,4941	8,00E-01	9,98E-04	Média	3,1149	0,4732	0,5985	8,00E-01	2,12E-03
Variancia	0,0062	0,0012	0,0050	1,23E-06	1,56E-09	Variancia	3,3220	0,0169	58,8883	5,33E-07	1,22E-09
Viés	0,0056	-0,0024	-0,0059	3,11E-05	-1,59E-06	Viés	0,1149	-0,0268	0,0985	1,53E-04	1,12E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	2,9991	0,5005	0,5015	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9879	0,5069	0,5265	8,00E-01	1,02E-03
Variancia	0,0010	0,0004	0,0035	4,63E-08	2,74E-10	Variancia	0,0369	0,0132	0,1489	2,17E-06	1,14E-08
Viés	-0,0009	0,0005	0,0015	5,03E-06	7,10E-07	Viés	-0,0121	0,0069	0,0265	3,12E-05	1,86E-05
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0000	0,5000	0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9989	0,5009	0,5053	8,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	7,52E-09	5,93E-12	Variancia	0,0017	0,0006	0,0076	3,13E-06	1,18E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-2,02E-07	-3,78E-09	Viés	-0,0011	0,0009	0,0053	1,71E-05	-2,45E-07
Verdadeiro	3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	2,9144	0,5097	0,3424	9,01E-01	3,47E-04	Média	2,9574	0,5233	0,5103	9,01E-01	6,57E-04
Variancia	0,0218	0,0023	0,0034	4,01E-06	8,37E-08	Variancia	0,2760	0,0268	0,2588	1,50E-04	6,27E-07
Viés	-0,0856	0,0097	-0,1576	1,05E-03	-6,53E-04	Viés	-0,0426	0,0233	0,0103	1,29E-03	-3,43E-04
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0000	0,5000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1048	0,4531	0,2708	9,00E-01	3,03E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	3,04E-10	2,16E-12	Variancia	0,0063	0,0022	0,0569	3,28E-08	1,25E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	1,68E-07	-1,52E-08	Viés	0,1048	-0,0469	-0,2292	1,18E-04	2,03E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	3,0000	0,5000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9920	0,5025	0,5043	9,00E-01	1,06E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	2,86E-12	1,43E-13	Variancia	0,0261	0,0067	0,0610	9,93E-07	6,99E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	1,38E-08	1,37E-09	Viés	-0,0080	0,0025	0,0043	4,40E-05	6,14E-05
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0001	0,4997	0,5001	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9963	0,5009	0,5032	9,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0075	0,0002	0,0002	6,70E-04	8,41E-10	Variancia	0,0091	0,0027	0,0188	1,50E-06	1,76E-09
Viés	0,0001	-0,0003	0,0001	3,15E-04	3,85E-07	Viés	-0,0037	0,0009	0,0032	3,06E-05	2,30E-06

Tabela 33 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,8971	0,5105	0,5565	8,03E-01	4,85E-04	Média	2,8293	0,5644	0,7583	8,03E-01	4,90E-04
Variancia	0,0307	0,0093	0,0664	1,46E-05	3,15E-08	Variancia	0,0911	0,0275	0,3241	7,38E-05	9,10E-08
Viés	-0,1029	0,0105	-0,4435	2,54E-03	-5,15E-04	Viés	-0,1707	0,0644	-0,2417	3,41E-03	-5,10E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0023	0,4983	0,9908	8,00E-01	9,94E-04	Média	3,1538	0,4134	0,6712	8,00E-01	1,70E-03
Variancia	0,0045	0,0015	0,0113	1,11E-06	2,31E-09	Variancia	1,3785	0,0197	23,3838	5,37E-07	1,24E-09
Viés	0,0023	-0,0017	-0,0092	5,18E-05	-5,85E-06	Viés	0,1538	-0,0866	-0,3288	1,91E-04	7,04E-04
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	2,9994	0,5006	1,0025	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9588	0,5312	1,2029	8,00E-01	1,05E-03
Variancia	0,0008	0,0005	0,0092	4,05E-08	6,22E-10	Variancia	0,0454	0,0290	0,8109	2,16E-06	3,25E-08
Viés	-0,0006	0,0006	0,0025	8,46E-07	1,02E-06	Viés	-0,0412	0,0312	0,2029	4,50E-05	4,93E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0000	0,5000	1,0001	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0000	0,5000	1,0087	8,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	5,94E-09	3,66E-12	Variancia	0,0017	0,0007	0,0198	3,02E-06	9,49E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0001	2,33E-07	-2,84E-08	Viés	0,0000	0,0000	0,0087	5,47E-06	1,39E-06
Verdadeiro	3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250 Modelo Kmenta Primal						N = 250 Modelo LM Primal Mult				
Média	2,9572	0,4720	0,3796	9,02E-01	-4,10E-04	Média	2,8536	0,5463	1,0177	9,01E-01	3,82E-04
Variancia	0,0159	0,0025	0,0031	4,00E-06	1,28E-07	Variancia	0,1876	0,0348	1,1148	1,87E-04	3,52E-07
Viés	-0,0428	-0,0280	-0,6204	2,19E-03	-1,41E-03	Viés	-0,1464	0,0463	0,0177	1,03E-03	-6,18E-04
	N = 250 Modelo LM Primal Aditivo						N = 250 Modelo Kmenta Dual				
Média	3,0000	0,5000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1403	0,4079	0,4402	9,00E-01	2,01E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	1,60E-10	1,80E-12	Variancia	0,0394	0,0033	5,6791	3,38E-08	1,28E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	9,30E-08	1,49E-08	Viés	0,1403	-0,0921	-0,5598	1,26E-04	1,01E-03
	N = 250 Modelo LM Dual Y Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual Y Mult				
Média	3,0000	0,5000	0,9999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9923	0,5080	1,0482	9,00E-01	1,05E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0001	5,70E-11	2,24E-11	Variancia	0,0254	0,0143	0,3140	1,05E-06	8,82E-08
Viés	0,0000	0,0000	-0,0001	8,20E-08	-3,61E-08	Viés	-0,0077	0,0080	0,0482	1,17E-04	4,51E-05
	N = 250 Modelo LM Dual II Aditivo						N = 250 Modelo LM Dual II Mult				
Média	3,0022	0,4999	1,0004	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9925	0,5025	1,0077	9,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0075	0,0002	0,0008	6,79E-04	8,41E-10	Variancia	0,0073	0,0032	0,0311	1,50E-06	1,89E-09
Viés	0,0022	-0,0001	0,0004	-1,17E-04	-1,42E-07	Viés	-0,0075	0,0025	0,0077	6,11E-05	8,19E-07

Tabela 34 – Resultados numéricos - continuação

Verdadeiro	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
	3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Kmenta		Primal		LM		Mult	
	N = 250										
Média	3,9358	1,0083	-0,1264	7,99E-01	1,07E-03	Média	3,9705	0,8590	0,5090	7,99E-01	1,09E-03
Variancia	18,9496	0,0673	0,3698	1,79E-05	5,45E-09	Variancia	3,7798	0,0312	29,7593	9,76E-05	1,32E-08
Vies	0,9358	0,1083	0,3736	-6,38E-04	7,23E-05	Vies	0,9705	-0,0410	1,0090	-1,34E-03	9,28E-05
	Modelo			Primal		Aditivo	Kmenta			Dual	
	N = 250										
Média	3,7638	0,7847	0,1142	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,6195	0,6962	-0,0144	8,00E-01	4,99E-03
Variancia	1,9478	0,0366	15,1559	1,05E-06	1,69E-10	Variancia	0,2660	0,0722	9,7374	5,35E-07	1,23E-09
Vies	0,7638	-0,1153	0,6142	7,37E-05	2,34E-06	Vies	0,6195	-0,2038	0,4856	2,37E-06	3,99E-03
	Modelo			LM		Dual Y	LM			Mult	
	N = 250										
Média	3,6202	0,7926	-0,5026	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,6714	0,7959	-0,4889	8,01E-01	1,06E-03
Variancia	1,5426	0,0444	0,0598	1,31E-05	5,34E-08	Variancia	3,0403	0,0567	0,3744	9,69E-05	3,26E-07
Vies	0,6202	-0,1074	-0,0026	3,74E-04	9,39E-06	Vies	0,6714	-0,1041	0,0111	7,57E-04	5,52E-05
	Modelo			LM		Dual II	LM			Mult	
	N = 250										
Média	3,3956	0,8283	-0,4777	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,7038	0,7941	-0,4941	8,00E-01	1,06E-03
Variancia	0,9033	0,0308	0,0525	9,32E-06	9,29E-09	Variancia	3,3881	0,0558	0,3382	2,05E-04	2,07E-07
Vies	0,3956	-0,0717	0,0223	3,76E-05	3,03E-06	Vies	0,7038	-0,1059	0,0059	-3,15E-04	6,38E-05
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Kmenta		Primal	LM			Mult	
	N = 250										
Média	3,2624	0,9748	-0,1480	9,00E-01	1,16E-03	Média	7,7017	0,8474	1,7059	8,97E-01	1,27E-03
Variancia	2,6830	0,0123	29,3094	5,11E-06	1,51E-08	Variancia	661,1614	0,0443	47,2580	8,94E-04	3,31E-07
Vies	0,2624	0,0748	0,3520	2,59E-04	1,56E-04	Vies	4,7017	-0,0526	2,2059	-3,31E-03	2,69E-04
	Modelo			LM		Aditivo	Kmenta			Dual	
	N = 250										
Média	3,3453	0,8453	-0,0426	9,00E-01	9,99E-04	Média	3,4824	0,7387	-0,0372	9,00E-01	9,99E-03
Variancia	0,7612	0,0185	11,3378	1,33E-06	2,60E-11	Variancia	0,3982	0,0789	2,6866	3,26E-08	1,23E-09
Vies	0,3453	-0,0547	0,4574	1,44E-04	-1,23E-06	Vies	0,4824	-0,1613	0,4628	-1,14E-06	8,99E-03
	Modelo			LM		Dual Y	LM			Mult	
	N = 250										
Média	2,6754	0,9556	-0,4597	9,01E-01	1,06E-03	Média	3,0831	0,8864	-0,5080	9,01E-01	1,07E-03
Variancia	0,3255	0,0021	0,0294	2,19E-04	4,43E-08	Variancia	1,4741	0,0344	0,0932	2,16E-04	5,40E-08
Vies	-0,3246	0,0556	0,0403	5,81E-04	6,30E-05	Vies	0,0831	-0,0136	-0,0080	5,65E-04	7,30E-05
	Modelo			LM		Dual II	LM			Mult	
	N = 250										
Média	3,6600	0,7671	-0,6082	9,03E-01	1,08E-03	Média	3,7828	0,7494	-0,5842	9,03E-01	1,10E-03
Variancia	1,9372	0,0765	0,0247	2,98E-04	1,11E-07	Variancia	3,0450	0,0892	0,0998	2,99E-04	1,33E-07
Vies	0,6600	-0,1329	-0,1082	2,78E-03	7,59E-05	Vies	0,7828	-0,1506	-0,0842	2,75E-03	9,92E-05

Tabela 35 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			Modelo			Mult	
	N = 250			Kmenta			N = 250			LM	
Média	3,7234	0,8516	-0,6678	8,00E-01	1,21E-03	Média	4,7597	0,7412	0,7321	7,98E-01	1,17E-03
Variância	1,9152	0,0428	4262,0636	1,65E-05	1,31E-08	Variância	9,7246	0,0799	20,9714	8,60E-05	7,81E-08
Viés	0,7234	-0,0484	-0,7678	-4,72E-04	2,09E-04	Viés	1,7597	-0,1588	0,6321	-1,84E-03	1,74E-04
	Modelo			Aditivo			Modelo			Dual	
	N = 250			Primal			N = 250			Kmenta	
Média	3,0932	0,8844	0,0871	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,4554	0,7293	2,8758	8,00E-01	4,41E-03
Variância	0,0878	0,0023	0,0606	1,19E-06	1,37E-09	Variância	9,2661	0,0506	5282,3720	5,44E-07	1,24E-09
Viés	0,0932	-0,0156	-0,0129	1,87E-05	4,67E-06	Viés	0,4554	-0,1707	2,7758	1,20E-05	3,41E-03
	Modelo			Dual Y			Modelo			LM	
	N = 250			Aditivo			N = 250			Dual Y	
Média	3,0090	0,8977	0,1017	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,1947	0,8572	0,1365	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0182	0,0007	0,0054	4,13E-08	3,23E-11	Variância	0,5318	0,0180	0,1227	2,38E-06	7,73E-10
Viés	0,0090	-0,0023	0,0017	1,72E-06	3,07E-07	Viés	0,1947	-0,0428	0,0365	-4,68E-06	7,89E-06
	Modelo			Dual II			Modelo			Mult	
	N = 250			Aditivo			N = 250			LM	
Média	3,0003	0,8999	0,0999	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0468	0,8903	0,0875	8,00E-01	9,98E-04
Variância	0,0003	0,0000	0,0000	1,61E-08	2,16E-11	Variância	0,0606	0,0018	0,0084	3,58E-06	2,68E-09
Viés	0,0003	-0,0001	-0,0001	6,52E-07	-1,91E-08	Viés	0,0468	-0,0097	-0,0125	-1,29E-05	-2,36E-06
Verdadeiro	3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	Modelo			Primal			Modelo			Mult	
	N = 250			Kmenta			N = 250			LM	
Média	3,6188	0,8495	0,0702	9,00E-01	1,46E-03	Média	6,0202	0,7424	0,1230	8,99E-01	1,48E-03
Variância	0,3864	0,0054	12,0192	4,31E-06	4,79E-08	Variância	34,5279	0,0705	0,4901	1,74E-04	6,87E-07
Viés	0,6188	-0,0505	-0,0298	1,44E-04	4,55E-04	Viés	3,0202	-0,1576	0,0230	-9,45E-04	4,77E-04
	Modelo			Aditivo			Modelo			Dual	
	N = 250			Primal			N = 250			Kmenta	
Média	3,0001	0,9000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,2444	0,8316	2,5305	9,00E-01	8,61E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	3,35E-10	1,60E-12	Variância	0,1730	0,0303	1620,1872	3,35E-08	1,23E-09
Viés	0,0001	0,0000	0,0000	4,02E-08	1,09E-08	Viés	0,2444	-0,0684	2,4305	2,15E-05	7,61E-03
	Modelo			Dual Y			Modelo			LM	
	N = 250			Aditivo			N = 250			Dual Y	
Média	2,9996	0,9001	0,1002	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,2008	0,8643	0,0916	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0000	1,69E-11	6,47E-13	Variância	0,5264	0,0132	0,0617	1,27E-06	2,30E-09
Viés	-0,0004	0,0001	0,0002	-2,36E-07	4,88E-08	Viés	0,2008	-0,0357	-0,0084	-1,77E-05	1,14E-05
	Modelo			Dual II			Modelo			Mult	
	N = 250			Aditivo			N = 250			LM	
Média	2,9998	0,8999	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9974	0,8999	0,1038	9,00E-01	9,97E-04
Variância	0,0075	0,0007	0,0000	6,73E-04	8,34E-10	Variância	0,0167	0,0003	0,0024	1,01E-05	3,84E-09
Viés	-0,0002	-0,0001	0,0000	3,34E-04	-4,52E-08	Viés	-0,0026	-0,0001	0,0038	-1,60E-04	-3,41E-06

Tabela 36 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	3,1269	0,9539	-0,3356	7,99E-01	1,13E-03	Média	3,6161	0,8124	0,4616	7,98E-01	1,11E-03
Variância	0,5632	0,0306	3047,6882	1,49E-05	1,88E-08	Variância	1,5462	0,0297	0,2122	7,84E-05	6,89E-08
Vies	0,1269	0,0539	-0,8356	-1,12E-03	1,33E-04	Vies	0,6161	-0,0876	-0,0384	-1,77E-03	1,10E-04
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0333	0,8946	0,4906	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,7644	0,6689	11,6008	8,00E-01	3,51E-03
Variância	0,0213	0,0005	0,0043	1,33E-06	1,51E-09	Variância	31,7247	0,0629	387972,6648	5,32E-07	1,24E-09
Vies	0,0333	-0,0054	-0,0094	-3,27E-05	3,88E-06	Vies	0,7644	-0,2311	11,1008	1,80E-04	2,51E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	3,0027	0,8992	0,4998	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0844	0,8771	0,4935	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0042	0,0002	0,0024	4,84E-08	9,51E-11	Variância	0,1631	0,0070	0,0740	2,28E-06	2,40E-09
Vies	0,0027	-0,0008	-0,0002	2,71E-07	1,39E-07	Vies	0,0844	-0,0229	-0,0065	3,03E-05	5,63E-06
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0000	0,9000	0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0010	0,8995	0,5027	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,20E-08	8,16E-12	Variância	0,0078	0,0003	0,0036	3,54E-06	1,22E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	4,35E-07	-4,31E-09	Vies	0,0010	-0,0005	0,0027	2,37E-06	-6,21E-08
Verdadeiro	3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	2,7852	1,0082	110,7517	9,00E-01	1,12E-03	Média	3,4467	0,8627	0,5123	9,00E-01	1,05E-03
Variância	0,1117	0,0039	1,2194E+08	4,02E-06	7,09E-08	Variância	2,6964	0,0158	0,0573	1,50E-04	7,23E-07
Vies	-0,2148	0,1082	110,2517	-3,14E-04	1,21E-04	Vies	0,4467	-0,0373	0,0123	-8,80E-05	4,80E-05
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0000	0,9000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,8026	0,7683	6,9594	9,00E-01	5,96E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,48E-10	4,87E-12	Variância	10,4803	0,0522	7803,8507	3,30E-08	1,25E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	1,92E-07	1,81E-08	Vies	0,8026	-0,1317	6,4594	1,61E-04	4,96E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	3,0000	0,9000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0564	0,8882	0,4792	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	4,83E-12	4,66E-14	Variância	0,0856	0,0024	0,0196	9,87E-07	6,81E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	1,11E-08	-9,34E-10	Vies	0,0564	-0,0118	-0,0208	3,31E-05	3,00E-06
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0004	0,9002	0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0099	0,8963	0,5038	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0007	0,0002	6,86E-04	8,27E-10	Variância	0,0338	0,0012	0,0161	1,45E-06	1,72E-09
Vies	0,0004	0,0002	-0,0002	-4,17E-04	5,37E-08	Vies	0,0099	-0,0037	0,0038	1,32E-05	1,96E-06

Tabela 37 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	2,9050	0,9980	0,1864	8,00E-01	8,41E-04	Média	3,1121	0,8588	0,9203	8,00E-01	8,03E-04
Variância	0,2356	0,0228	4886,4302	1,47E-05	2,82E-08	Variância	0,4727	0,0157	0,1578	7,27E-05	7,93E-08
Viés	-0,0950	0,0980	-0,8136	-4,14E-04	-1,59E-04	Viés	0,1121	-0,0412	-0,0797	-2,86E-04	-1,97E-04
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0187	0,8962	0,9906	8,00E-01	9,98E-04	Média	4,2977	0,6199	6,0797	8,00E-01	2,55E-03
Variância	0,0137	0,0004	0,0056	1,54E-06	3,00E-09	Variância	53,4427	0,0688	9247,5030	5,27E-07	1,25E-09
Viés	0,0187	-0,0038	-0,0094	6,60E-07	-1,67E-06	Viés	1,2977	-0,2801	5,0797	3,08E-04	1,55E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	3,0019	0,8993	0,9991	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0531	0,8820	0,9809	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0022	0,0001	0,0029	5,62E-08	2,77E-10	Variância	0,0815	0,0048	0,0857	2,15E-06	6,00E-09
Viés	0,0019	-0,0007	-0,0009	2,38E-06	2,08E-07	Viés	0,0531	-0,0180	-0,0191	1,68E-05	5,10E-06
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0000	0,9000	1,0000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0013	0,8994	1,0024	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	2,95E-10	9,31E-14	Variância	0,0061	0,0002	0,0054	3,31E-06	5,66E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	1,03E-07	2,92E-09	Viés	0,0013	-0,0006	0,0024	2,16E-06	2,78E-07
Verdadeiro	3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	Kmenta	Primal				Modelo	LM	Primal	Mult
Média	2,9634	0,9485	0,8914	9,00E-01	2,02E-04	Média	2,9734	0,8917	0,9843	9,00E-01	5,18E-04
Variância	0,0806	0,0036	1,7618E+04	4,10E-06	1,16E-07	Variância	0,4127	0,0054	0,1656	1,33E-04	5,37E-07
Viés	-0,0366	0,0485	-0,1086	4,15E-04	-7,98E-04	Viés	-0,0266	-0,0083	-0,0157	-4,75E-04	-4,82E-04
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Primal	Aditivo			Modelo	Kmenta	Dual	
Média	3,0000	0,9000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	325,0087	0,7156	468,2374	9,00E-01	3,38E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,60E-10	8,27E-12	Variância	1026055139,6679	0,0597	2116552029,6548	3,34E-08	1,26E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-4,26E-07	9,49E-10	Viés	322,0087	-0,1844	467,2374	2,32E-04	2,38E-03
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual Y	Aditivo			Modelo	LM	Dual Y	Mult
Média	3,0000	0,9000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0228	0,8937	0,9863	9,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,96E-12	2,34E-13	Variância	0,0341	0,0011	0,0191	9,73E-07	2,60E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-4,02E-08	4,57E-09	Viés	0,0228	-0,0063	-0,0137	3,97E-05	1,70E-05
	N = 250						N = 250				
		Modelo	LM	Dual II	Aditivo			Modelo	LM	Dual II	Mult
Média	3,0006	0,8997	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0067	0,8965	1,0074	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0076	0,0007	0,0008	6,79E-04	8,28E-10	Variância	0,0264	0,0012	0,0270	1,50E-06	2,14E-09
Viés	0,0006	-0,0003	0,0000	6,45E-06	-3,64E-07	Viés	0,0067	-0,0035	0,0074	3,07E-05	1,68E-06

Tabela 38 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500 Modelo						N = 500 Modelo				
Média	3,0286	0,1157	-0,5686	8,01E-01	9,37E-04	Média	3,0212	0,1081	-0,4940	8,01E-01	9,75E-04
Variância	0,0016	0,0001	0,0132	7,40E-06	2,09E-09	Variância	0,0151	0,0013	0,0363	7,39E-05	2,42E-08
Viés	0,0286	0,0157	-0,0686	8,91E-04	-6,33E-05	Viés	0,0212	0,0081	0,0060	1,15E-03	-2,54E-05
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo Kmenta				
Média	3,0002	0,1000	-0,5002	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0018	0,1093	-0,5761	8,00E-01	1,54E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	1,96E-07	2,54E-11	Variância	0,0036	0,0001	0,0630	2,36E-07	1,53E-10
Viés	0,0002	0,0000	-0,0002	2,43E-05	-2,39E-07	Viés	0,0018	0,0093	-0,0761	-5,15E-05	5,42E-04
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo LM				
Média	3,0000	0,1000	-0,4999	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9978	0,1002	-0,4718	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	7,15E-09	4,18E-12	Variância	0,0003	0,0000	0,3939	1,86E-06	2,39E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0001	1,14E-06	7,57E-09	Viés	-0,0022	0,0002	0,0282	-9,34E-06	1,16E-05
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo LM				
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9924	0,0972	-0,4695	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,90E-09	1,84E-12	Variância	0,0018	0,0003	0,0533	2,78E-06	2,04E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-1,36E-07	-3,50E-09	Viés	-0,0076	-0,0028	0,0305	-1,93E-05	3,87E-06
Verdadeiro	3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500 Modelo Kmenta						N = 500 Modelo LM				
Média	3,0403	0,0962	-0,9864	9,01E-01	8,25E-04	Média	2,9934	0,1059	-0,5369	8,99E-01	1,02E-03
Variância	0,0013	0,0001	0,0128	1,92E-06	7,34E-09	Variância	0,1405	0,0038	0,0334	3,99E-04	5,76E-07
Viés	0,0403	-0,0038	-0,4864	1,15E-03	-1,75E-04	Viés	-0,0066	0,0059	-0,0369	-7,26E-04	1,61E-05
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo Kmenta				
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9594	0,1097	-0,3278	9,00E-01	3,12E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,57E-12	2,97E-15	Variância	0,0009	0,0000	0,0127	1,48E-08	1,53E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	2,32E-08	-4,02E-10	Viés	-0,0406	0,0097	0,1722	1,78E-05	2,12E-03
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo LM				
Média	3,0000	0,1000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9939	0,0996	-0,4857	9,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,60E-14	9,41E-17	Variância	0,0011	0,0002	0,0060	3,61E-06	1,09E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	3,25E-09	-6,45E-11	Viés	-0,0061	-0,0004	0,0143	-1,21E-05	2,60E-05
	N = 500 Modelo LM						N = 500 Modelo LM				
Média	3,0001	0,1000	-0,5001	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9990	0,1001	-0,4981	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0076	0,0000	0,0002	6,79E-04	8,39E-10	Variância	0,0012	0,0000	0,0013	3,55E-06	1,09E-09
Viés	0,0001	0,0000	-0,0001	2,53E-04	3,52E-07	Viés	-0,0010	0,0001	0,0019	-8,99E-06	8,25E-07

Tabela 39 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Primal			N = 500			Mult	
Média	3,0836	0,1687	0,0409	8,03E-01	7,12E-04	Média	3,0782	0,1517	0,2151	8,05E-01	8,06E-04
Variância	0,0015	0,0005	0,0058	7,10E-06	7,40E-09	Variância	0,0125	0,0041	2,1391	6,86E-05	7,34E-08
Vies	0,0836	0,0687	-0,0591	3,20E-03	-2,88E-04	Vies	0,0782	0,0517	0,1151	5,34E-03	-1,94E-04
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual	
Média	3,0006	0,1003	0,0996	8,00E-01	9,99E-04	Média	3,0286	0,1003	0,6875	8,00E-01	1,37E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0004	2,08E-07	1,09E-10	Variância	0,1440	0,0029	546,3672	2,32E-07	1,56E-10
Vies	0,0006	0,0003	-0,0004	4,34E-05	-1,26E-06	Vies	0,0286	0,0003	0,5875	7,62E-06	3,67E-04
	N = 500			Dual Y			N = 500			Mult	
Média	3,0000	0,1000	0,1004	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9887	0,0867	1,8820	8,00E-01	1,06E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0003	7,64E-09	3,62E-11	Variância	0,0005	0,0009	36,2303	1,81E-06	1,89E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0004	1,54E-07	1,54E-07	Vies	-0,0113	-0,0133	1,7820	1,49E-05	5,82E-05
	N = 500			Dual II			N = 500			Mult	
Média	3,0000	0,1000	0,1000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9970	0,0990	0,1094	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	8,49E-10	5,40E-13	Variância	0,0003	0,0002	0,0081	1,58E-06	6,80E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	3,73E-08	2,13E-09	Vies	-0,0030	-0,0010	0,0094	7,51E-05	3,10E-06
Verdadeiro	3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Primal			N = 500			Mult	
Média	3,1019	0,1738	0,0494	9,02E-01	3,12E-04	Média	3,0455	0,1254	0,1488	9,04E-01	8,18E-04
Variância	0,0014	0,0004	0,0003	1,92E-06	3,04E-08	Variância	0,0482	0,0084	0,3442	2,05E-04	5,60E-07
Vies	0,1019	0,0738	-0,0506	2,29E-03	-6,88E-04	Vies	0,0455	0,0254	0,0488	4,24E-03	-1,82E-04
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual	
Média	3,0000	0,1000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0090	0,0989	0,1614	9,00E-01	1,74E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	7,64E-12	1,74E-14	Variância	0,0023	0,0000	45,6633	1,50E-08	1,59E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	2,02E-08	-1,65E-09	Vies	0,0090	-0,0011	0,0614	3,77E-07	7,40E-04
	N = 500			Dual Y			N = 500			Mult	
Média	2,9974	0,0986	0,1269	9,00E-01	1,03E-03	Média	2,9891	0,0923	0,5012	9,00E-01	1,10E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0117	2,71E-08	1,77E-08	Variância	0,0008	0,0006	3,3950	3,23E-06	7,22E-08
Vies	-0,0026	-0,0014	0,0269	-4,08E-05	3,31E-05	Vies	-0,0109	-0,0077	0,4012	1,06E-06	9,81E-05
	N = 500			Dual II			N = 500			Mult	
Média	3,0002	0,1000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9701	0,1013	0,2038	9,00E-01	1,02E-03
Variância	0,0075	0,0000	0,0000	6,74E-04	8,42E-10	Variância	0,0147	0,0003	0,0935	3,71E-06	4,36E-09
Vies	0,0002	0,0000	0,0000	-2,35E-04	-1,50E-07	Vies	-0,0299	0,0013	0,1038	-1,98E-04	1,70E-05

Tabela 40 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	Kmenta						Kmenta				
	Primal						Primal				
Média	3,1141	0,2168	0,1551	8,04E-01	4,93E-04	Média	3,1173	0,1931	0,4276	8,08E-01	6,22E-04
Variância	0,0015	0,0008	0,0037	6,81E-06	1,16E-08	Variância	0,0100	0,0057	3,7342	6,46E-05	9,66E-08
Vies	0,1141	0,1168	-0,3449	4,49E-03	-5,07E-04	Vies	0,1173	0,0931	-0,0724	8,08E-03	-3,78E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Primal						Primal				
	Aditivo						Aditivo				
Média	3,0010	0,1006	0,4953	8,00E-01	9,97E-04	Média	3,0779	0,1028	1,6055	8,00E-01	1,26E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0016	2,17E-07	2,12E-10	Variância	0,7142	0,0062	2822,8574	2,38E-07	1,54E-10
Vies	0,0010	0,0006	-0,0047	7,46E-05	-2,91E-06	Vies	0,0779	0,0028	1,1055	1,31E-05	2,56E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Dual Y						Dual Y				
	Aditivo						Aditivo				
Média	3,0000	0,1000	0,5006	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9928	0,0856	2,8611	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0011	7,77E-09	8,45E-11	Variância	0,0004	0,0010	67,3479	1,85E-06	1,64E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0006	2,51E-06	5,15E-08	Vies	-0,0072	-0,0144	2,3611	1,51E-04	3,46E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Dual II						Dual II				
	Aditivo						Aditivo				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9995	0,1000	0,5022	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	3,90E-10	1,64E-13	Variância	0,0002	0,0001	0,0022	1,66E-06	3,38E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-2,42E-07	-1,54E-09	Vies	-0,0005	0,0000	0,0022	4,42E-05	3,41E-07
Verdadeiro	3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	Kmenta						Kmenta				
	Primal						Primal				
Média	3,1531	0,2168	0,1029	9,03E-01	-2,49E-04	Média	3,0855	0,1431	0,4056	9,05E-01	5,67E-04
Variância	0,0014	0,0006	0,0003	1,80E-06	4,80E-08	Variância	0,0271	0,0092	1,6599	2,10E-04	3,56E-07
Vies	0,1531	0,1168	-0,3971	3,20E-03	-1,25E-03	Vies	0,0855	0,0431	-0,0944	5,47E-03	-4,33E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Primal						Primal				
	Aditivo						Aditivo				
Média	3,0000	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0221	0,0968	0,3578	9,00E-01	1,35E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	5,51E-12	2,99E-14	Variância	0,0040	0,0006	1,5148	1,50E-08	1,54E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	4,09E-08	-1,67E-09	Vies	0,0221	-0,0032	-0,1422	1,64E-05	3,53E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Dual Y						Dual Y				
	Aditivo						Aditivo				
Média	3,0000	0,1000	0,4998	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9979	0,0893	1,8188	9,00E-01	9,77E-04
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	3,66E-10	4,60E-11	Variância	0,0008	0,0012	20,7808	3,32E-06	6,18E-08
Vies	0,0000	0,0000	-0,0002	3,34E-07	-1,19E-07	Vies	-0,0021	-0,0107	1,3188	2,75E-04	-2,25E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
	LM						LM				
	Dual II						Dual II				
	Aditivo						Aditivo				
Média	2,9985	0,1000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9819	0,1027	0,8204	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0074	0,0000	0,0002	6,86E-04	8,39E-10	Variância	0,0143	0,0012	3,8433	3,24E-06	4,07E-09
Vies	-0,0015	0,0000	0,0000	-2,17E-04	-2,70E-08	Vies	-0,0181	0,0027	0,3204	-2,04E-04	1,06E-05

Tabela 41 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	8,00E-01	1,00E-03
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,1383	0,2720	0,1742	8,03E-01	2,20E-04	Média	3,1462	0,2333	0,4357	8,09E-01	3,96E-04
Variância	0,0014	0,0011	0,0029	6,61E-06	1,59E-08	Variância	0,0074	0,0057	8,1001	6,09E-05	9,71E-08
Vies	0,1383	0,1720	-0,8258	5,43E-03	-7,80E-04	Vies	0,1462	0,1333	-0,5643	9,42E-03	-6,04E-04
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0012	0,1008	0,9852	8,00E-01	9,95E-04	Média	3,1144	0,1120	1,6127	8,00E-01	1,17E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0156	1,97E-07	3,52E-10	Variância	0,5253	0,0108	339,7586	2,42E-07	1,55E-10
Vies	0,0012	0,0008	-0,0148	7,55E-05	-4,58E-06	Vies	0,1144	0,0120	0,6127	3,75E-05	1,65E-04
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,1000	1,0016	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9984	0,0882	4,7182	8,00E-01	9,91E-04
Variância	0,0000	0,0000	0,0041	7,84E-09	1,30E-10	Variância	0,0003	0,0011	179,9385	1,84E-06	1,40E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0016	1,15E-06	-9,56E-08	Vies	-0,0016	-0,0118	3,7182	2,06E-04	-8,74E-06
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0004	0,1000	1,0002	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9998	0,1001	1,0007	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0000	0,0008	5,34E-04	8,24E-10	Variância	0,0001	0,0000	0,0005	1,55E-06	2,29E-10
Vies	0,0004	0,0000	0,0002	-2,95E-05	-4,07E-07	Vies	-0,0002	0,0001	0,0007	1,36E-05	4,86E-08
Verdadeiro	3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,1	1	9,00E-01	1,00E-03
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,1932	0,2614	0,0775	9,04E-01	-8,85E-04	Média	3,0187	0,1593	1,5162	9,02E-01	6,11E-04
Variância	0,0013	0,0009	0,0002	1,72E-06	6,81E-08	Variância	0,0273	0,0130	20,0764	2,56E-04	3,25E-07
Vies	0,1932	0,1614	-0,9225	3,77E-03	-1,88E-03	Vies	0,0187	0,0593	0,5162	1,74E-03	-3,89E-04
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,1000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0549	0,0961	1,0177	9,00E-01	1,17E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	3,01E-12	4,89E-15	Variância	0,2530	0,0035	105,6665	1,52E-08	1,49E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	1,56E-08	-4,17E-10	Vies	0,0549	-0,0039	0,0177	2,81E-05	1,65E-04
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,1000	0,9999	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9977	0,0849	4,3939	9,00E-01	9,14E-04
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	1,67E-10	2,66E-11	Variância	0,0009	0,0019	92,9930	3,43E-06	5,45E-08
Vies	0,0000	0,0000	-0,0001	1,28E-07	-5,26E-08	Vies	-0,0023	-0,0151	3,3939	1,69E-04	-8,57E-05
	$N = 500$						$N = 500$				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9994	0,1000	0,9997	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9938	0,1111	2,2695	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0000	0,0008	6,73E-04	8,50E-10	Variância	0,0129	0,0076	53,6972	2,89E-06	3,46E-09
Vies	-0,0006	0,0000	-0,0003	1,39E-05	5,59E-08	Vies	-0,0062	0,0111	1,2695	-2,06E-04	3,15E-06

Tabela 42 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	2,2723	0,7365	-0,1738	7,99E-01	1,07E-03	Média	2,8909	0,6228	-0,2865	7,97E-01	1,07E-03
Variância	0,0384	0,0019	0,0008	7,61E-06	1,63E-09	Variância	2,0625	0,0704	0,4740	7,36E-05	7,59E-09
Vies	-0,7277	0,2365	0,3262	-1,25E-03	6,61E-05	Vies	-0,1091	0,1228	0,2135	-2,53E-03	7,13E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0100	0,4988	-0,5007	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,4113	0,6709	-0,3839	8,00E-01	4,69E-03
Variância	0,0143	0,0006	0,0003	8,87E-08	1,58E-11	Variância	0,0270	0,0025	0,0085	2,42E-07	1,57E-10
Vies	0,0100	-0,0012	-0,0007	4,89E-07	2,86E-07	Vies	-0,5887	0,1709	0,1161	-9,92E-05	3,69E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	2,9996	0,5001	-0,4999	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9408	0,5271	-0,4667	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0008	0,0000	0,0000	3,08E-09	2,70E-13	Variância	0,2383	0,0159	0,0208	1,86E-06	1,34E-10
Vies	-0,0004	0,0001	0,0001	-3,82E-07	8,16E-09	Vies	-0,0592	0,0271	0,0333	-1,71E-06	3,40E-06
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,5000	-0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0074	0,5025	-0,4982	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0002	0,0000	0,0000	1,34E-09	2,40E-12	Variância	0,0983	0,0057	0,0062	2,34E-06	1,36E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	5,11E-07	-7,35E-09	Vies	0,0074	0,0025	0,0018	-1,17E-05	5,76E-06
Verdadeiro	3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	1,9024	0,7987	-0,1343	9,00E-01	1,17E-03	Média	3,4895	0,6324	-0,2264	8,98E-01	1,26E-03
Variância	0,0087	0,0003	0,0001	2,14E-06	6,19E-09	Variância	9,8902	0,1026	0,4729	2,64E-04	1,23E-07
Vies	-1,0976	0,2987	0,3657	-4,43E-04	1,65E-04	Vies	0,4895	0,1324	0,2736	-1,72E-03	2,56E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,5000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,4339	0,6487	-0,4115	9,00E-01	9,57E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,88E-12	2,79E-15	Variância	0,0060	0,0004	0,0016	1,55E-08	1,58E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-2,83E-09	3,89E-10	Vies	-0,5661	0,1487	0,0885	-4,51E-05	8,57E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0000	0,5000	-0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9149	0,5347	-0,4545	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	6,90E-13	1,88E-15	Variância	0,3482	0,0204	0,0306	1,48E-06	1,17E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-8,43E-09	4,15E-10	Vies	-0,0851	0,0347	0,0455	-2,28E-05	1,09E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo						Modelo				
Média	3,0009	0,4999	-0,5001	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0028	0,4998	-0,5004	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0074	0,0002	0,0002	6,73E-04	8,22E-10	Variância	0,0128	0,0003	0,0002	1,12E-06	4,25E-10
Vies	0,0009	-0,0001	-0,0001	9,41E-05	2,13E-07	Vies	0,0028	-0,0002	-0,0004	6,32E-06	-1,32E-07

Tabela 43 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
Média	2,9726	0,5057	0,0942	7,99E-01	9,62E-04	Média	2,9801	0,5070	0,1005	7,99E-01	9,73E-04
Variância	0,0141	0,0012	0,0017	6,73E-06	5,67E-09	Variância	0,0644	0,0051	0,0067	4,75E-05	2,86E-08
Vies	-0,0274	0,0057	-0,0058	-6,03E-04	-3,80E-05	Vies	-0,0199	0,0070	0,0005	-6,79E-04	-2,68E-05
	N = 500						N = 500				
Média	3,0015	0,4996	0,0995	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0513	0,4854	0,0615	8,00E-01	2,71E-03
Variância	0,0007	0,0001	0,0001	2,55E-07	1,30E-10	Variância	0,0111	0,0028	0,0123	2,38E-07	1,58E-10
Vies	0,0015	-0,0004	-0,0005	-6,25E-06	1,12E-07	Vies	0,0513	-0,0146	-0,0385	1,49E-05	1,71E-03
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0019	0,4993	0,0978	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0001	9,68E-09	1,42E-11	Variância	0,0089	0,0014	0,0053	1,44E-06	1,00E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-9,40E-07	2,84E-08	Vies	0,0019	-0,0007	-0,0022	7,49E-06	1,02E-06
	N = 500						N = 500				
Média	2,9997	0,5000	0,0999	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9991	0,5003	0,1005	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0076	0,0002	0,0000	5,35E-04	8,31E-10	Variância	0,0022	0,0002	0,0004	2,20E-06	1,19E-10
Vies	-0,0003	0,0000	-0,0001	1,17E-04	3,57E-07	Vies	-0,0009	0,0003	0,0005	-6,48E-06	8,28E-08
Verdadeiro	3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
Média	2,9467	0,5116	0,0947	9,00E-01	8,60E-04	Média	3,0240	0,5039	0,1013	9,00E-01	9,56E-04
Variância	0,0079	0,0004	0,0001	1,77E-06	2,33E-08	Variância	0,2778	0,0106	0,0052	1,61E-04	4,12E-07
Vies	-0,0533	0,0116	-0,0053	5,34E-05	-1,40E-04	Vies	0,0240	0,0039	0,0013	2,16E-04	-4,40E-05
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0873	0,4768	0,0502	9,00E-01	4,57E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	2,97E-11	6,29E-14	Variância	0,0026	0,0005	0,0022	1,48E-08	1,54E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,25E-08	-2,49E-10	Vies	0,0873	-0,0232	-0,0498	-7,23E-07	3,57E-03
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9993	0,4997	0,0988	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	2,96E-13	2,71E-15	Variância	0,0054	0,0006	0,0023	1,14E-06	4,66E-09
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,26E-09	1,21E-09	Vies	-0,0007	-0,0003	-0,0012	-9,29E-07	7,09E-06
	N = 500						N = 500				
Média	2,9993	0,5001	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9698	0,5172	0,1416	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0074	0,0002	0,0000	6,81E-04	8,38E-10	Variância	0,0853	0,0064	0,0426	1,88E-06	4,86E-09
Vies	-0,0007	0,0001	0,0000	2,78E-04	2,58E-07	Vies	-0,0302	0,0172	0,0416	1,19E-05	5,15E-06

Tabela 44 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
Média	2,9348	0,5041	0,3321	8,01E-01	7,13E-04	Média	2,8981	0,5333	0,4396	8,03E-01	7,70E-04
Variância	0,0094	0,0012	0,0018	6,68E-06	9,83E-09	Variância	0,0437	0,0059	0,0204	4,90E-05	5,50E-08
Vies	-0,0652	0,0041	-0,1679	1,40E-03	-2,87E-04	Vies	-0,1019	0,0333	-0,0604	2,85E-03	-2,30E-04
	N = 500						N = 500				
Média	3,0010	0,4996	0,4988	8,00E-01	9,99E-04	Média	3,1772	0,4236	0,2268	8,00E-01	1,91E-03
Variância	0,0006	0,0001	0,0002	3,08E-07	2,60E-10	Variância	0,0103	0,0032	0,5766	2,41E-07	1,54E-10
Vies	0,0010	-0,0004	-0,0012	2,92E-05	-1,26E-06	Vies	0,1772	-0,0764	-0,2732	4,07E-05	9,06E-04
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,4999	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9969	0,5016	0,5049	8,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0001	1,17E-08	4,36E-11	Variância	0,0073	0,0021	0,0163	1,41E-06	4,29E-09
Vies	0,0000	0,0000	-0,0001	2,38E-06	-4,74E-08	Vies	-0,0031	0,0016	0,0049	6,71E-06	6,78E-06
	N = 500						N = 500				
Média	3,0013	0,5002	0,4998	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9987	0,5003	0,4999	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0002	0,0002	5,28E-04	8,14E-10	Variância	0,0022	0,0004	0,0012	4,45E-06	1,91E-10
Vies	0,0013	0,0002	-0,0002	-1,47E-04	1,32E-07	Vies	-0,0013	0,0003	-0,0001	2,68E-05	-1,12E-08
Verdadeiro	3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
Média	3,0684	0,4641	0,2356	9,02E-01	1,05E-04	Média	2,9136	0,5331	0,4909	9,03E-01	5,97E-04
Variância	0,0071	0,0006	0,0001	1,87E-06	4,14E-08	Variância	0,2080	0,0165	0,1170	2,16E-04	3,72E-07
Vies	0,0684	-0,0359	-0,2644	1,80E-03	-8,95E-04	Vies	-0,0864	0,0331	-0,0091	3,43E-03	-4,03E-04
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,2151	0,4234	0,2550	9,00E-01	2,32E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,43E-11	6,13E-14	Variância	0,0093	0,0007	5,1591	1,50E-08	1,52E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-5,98E-08	3,18E-09	Vies	0,2151	-0,0766	-0,2450	3,05E-05	1,32E-03
	N = 500						N = 500				
Média	3,0000	0,5000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9959	0,5020	0,5078	9,00E-01	1,04E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	1,47E-13	5,98E-15	Variância	0,0063	0,0012	0,0117	1,61E-06	5,16E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-7,48E-09	5,82E-10	Vies	-0,0041	0,0020	0,0078	1,12E-04	4,20E-05
	N = 500						N = 500				
Média	2,9997	0,4999	0,5002	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9776	0,5289	0,6166	9,00E-01	9,92E-04
Variância	0,0075	0,0002	0,0002	6,91E-04	8,40E-10	Variância	0,1031	0,0151	0,2191	1,79E-06	5,01E-09
Vies	-0,0003	-0,0001	0,0002	-1,58E-04	-2,32E-08	Vies	-0,0224	0,0289	0,1166	-1,89E-05	-7,57E-06

Tabela 45 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
Média	2,9738	0,4656	0,3642	8,03E-01	3,70E-04	Média	2,9584	0,4968	0,5660	8,06E-01	4,89E-04
Variância	0,0067	0,0014	0,0018	6,88E-06	1,48E-08	Variância	0,0337	0,0074	0,0918	4,92E-05	7,84E-08
Vies	-0,0262	-0,0344	-0,0358	3,45E-03	-6,30E-04	Vies	-0,0416	-0,0032	-0,0434	6,05E-03	-5,11E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo		LM	Primal	Aditivo		Modelo		Kmenta	Dual	
Média	3,0015	0,4990	0,9947	8,00E-01	9,97E-04	Média	3,2000	0,3823	0,4042	8,00E-01	1,45E-03
Variância	0,0007	0,0002	0,0023	2,44E-07	4,01E-10	Variância	0,0328	0,0047	4,7254	2,38E-07	1,58E-10
Vies	0,0015	-0,0010	-0,0053	3,52E-05	-3,00E-06	Vies	0,2000	-0,1177	-0,5958	8,06E-05	4,49E-04
	N = 500		Modelo	LM	Dual Y		N = 500		Modelo	LM	Dual Y
Média	2,9998	0,5002	1,0009	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9795	0,5211	1,1146	8,00E-01	1,03E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0007	9,69E-09	1,37E-10	Variância	0,0157	0,0105	0,2123	1,40E-06	1,79E-08
Vies	-0,0002	0,0002	0,0009	-7,49E-07	3,66E-07	Vies	-0,0205	0,0211	0,1146	1,06E-04	2,52E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo		LM	Dual II	Aditivo		Modelo		LM	Dual II	Mult
Média	2,9986	0,5000	1,0000	8,00E-01	1,00E-03	Média	2,9990	0,5002	1,0004	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0002	0,0008	5,32E-04	8,42E-10	Variância	0,0018	0,0005	0,0033	5,46E-06	2,46E-10
Vies	-0,0014	0,0000	0,0000	1,21E-04	2,10E-07	Vies	-0,0010	0,0002	0,0004	1,92E-05	9,35E-08
Verdadeiro	3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,5	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500						N = 500				
	Modelo		Kmenta	Primal			Modelo		LM	Primal	Mult
Média	3,2445	0,3778	0,1726	9,03E-01	-6,98E-04	Média	2,8776	0,5452	1,0932	9,02E-01	5,64E-04
Variância	0,0064	0,0008	0,0001	1,81E-06	6,27E-08	Variância	0,3545	0,0583	1,0627	2,48E-04	3,21E-07
Vies	0,2445	-0,1222	-0,8274	3,12E-03	-1,70E-03	Vies	-0,1224	0,0452	0,0932	1,79E-03	-4,36E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo		LM	Primal	Aditivo		Modelo		Kmenta	Dual	
Média	3,0000	0,5000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1911	0,4002	0,4207	9,00E-01	1,46E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	7,03E-12	1,12E-14	Variância	0,0331	0,0012	13,7843	1,50E-08	1,50E-10
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-9,04E-09	-1,32E-09	Vies	0,1911	-0,0998	-0,5793	6,94E-05	4,62E-04
	N = 500						N = 500				
	Modelo		LM	Dual Y	Aditivo		Modelo		LM	Dual Y	Mult
Média	3,0000	0,5000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9879	0,5161	1,1088	9,00E-01	9,73E-04
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	9,21E-14	6,91E-15	Variância	0,0146	0,0085	0,3376	2,28E-06	5,69E-08
Vies	0,0000	0,0000	0,0000	-1,68E-09	-1,73E-10	Vies	-0,0121	0,0161	0,1088	2,05E-04	-2,73E-05
	N = 500						N = 500				
	Modelo		LM	Dual II	Aditivo		Modelo		LM	Dual II	Mult
Média	2,9997	0,5000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9498	0,5507	1,3251	9,00E-01	9,91E-04
Variância	0,0076	0,0002	0,0008	6,71E-04	8,39E-10	Variância	0,1127	0,0303	0,9767	1,82E-06	3,74E-09
Vies	-0,0003	0,0000	0,0000	-1,35E-04	1,55E-08	Vies	-0,0502	0,0507	0,3251	-1,74E-05	-8,69E-06

Tabela 46 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Primal			N = 500			Mult	
Média	2,8712	0,9949	-0,2031	7,99E-01	1,07E-03	Média	3,9629	0,8760	0,8162	7,98E-01	1,09E-03
Variancia	0,8570	0,0071	109,2796	8,27E-06	1,71E-09	Variancia	4,1770	0,0274	40,8103	7,72E-05	7,43E-09
Viés	-0,1288	0,0949	0,2969	-7,55E-04	7,01E-05	Viés	0,9629	-0,0240	1,3162	-1,82E-03	9,13E-05
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual	
Média	3,6280	0,7925	0,2259	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,4991	0,7200	-0,0023	8,00E-01	5,00E-03
Variancia	1,2093	0,0325	21,0421	1,13E-07	1,25E-11	Variancia	0,2709	0,0767	12,1941	2,42E-07	1,56E-10
Viés	0,6280	-0,1075	0,7259	1,48E-05	1,25E-07	Viés	0,4991	-0,1800	0,4977	-2,16E-06	4,00E-03
	N = 500			Dual Y			N = 500			Mult	
Média	3,1226	0,8781	-0,4485	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,5460	0,8102	-0,4958	8,01E-01	1,01E-03
Variancia	0,3651	0,0157	0,0324	5,71E-07	8,98E-12	Variancia	2,0389	0,0475	0,1249	5,12E-05	2,15E-08
Viés	0,1226	-0,0219	0,0515	8,10E-05	-2,57E-07	Viés	0,5460	-0,0898	0,0042	9,22E-04	7,55E-06
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual II	
Média	3,3639	0,8309	-0,5195	8,00E-01	1,01E-03	Média	3,7223	0,7876	-0,5134	8,00E-01	1,05E-03
Variancia	0,9330	0,0253	0,0222	5,81E-05	4,33E-08	Variancia	3,1065	0,0571	0,1128	2,68E-04	1,79E-07
Viés	0,3639	-0,0691	-0,0195	2,45E-04	1,07E-05	Viés	0,7223	-0,1124	-0,0134	-1,03E-04	5,35E-05
Verdadeiro	3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	-0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Primal			N = 500			Mult	
Média	2,8602	0,9821	-0,1185	9,00E-01	1,16E-03	Média	12,3536	0,8675	2,5653	8,95E-01	1,29E-03
Variancia	0,1636	0,0008	74,4758	2,20E-06	6,36E-09	Variancia	5768,1091	0,0382	59,0124	1,38E-03	2,68E-07
Viés	-0,1398	0,0821	0,3815	1,13E-04	1,55E-04	Viés	9,3536	-0,0325	3,0653	-4,95E-03	2,91E-04
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual	
Média	3,5833	0,8139	-0,3119	9,00E-01	9,99E-04	Média	3,3898	0,7592	-0,5613	9,00E-01	9,99E-03
Variancia	1,5620	0,0258	4,9000	6,30E-06	3,49E-11	Variancia	0,4744	0,0797	2888,1176	1,51E-08	1,55E-10
Viés	0,5833	-0,0861	0,1881	4,62E-04	-1,23E-06	Viés	0,3898	-0,1408	-0,0613	-1,82E-06	8,99E-03
	N = 500			Dual Y			N = 500			Mult	
Média	2,7576	0,9555	-0,4719	8,98E-01	1,04E-03	Média	3,2208	0,8698	-0,5213	8,99E-01	1,05E-03
Variancia	0,2333	0,0020	0,0381	1,68E-04	1,36E-08	Variancia	1,4028	0,0383	0,1008	1,87E-04	1,39E-08
Viés	-0,2424	0,0555	0,0281	-2,13E-03	3,99E-05	Viés	0,2208	-0,0302	-0,0213	-1,30E-03	4,68E-05
	N = 500			Aditivo			N = 500			Dual II	
Média	3,6630	0,7844	-0,5672	9,01E-01	1,03E-03	Média	3,5803	0,7951	-0,5133	9,01E-01	1,05E-03
Variancia	2,0537	0,0674	0,0925	2,57E-04	1,90E-08	Variancia	2,2687	0,0761	0,1745	2,58E-04	2,68E-08
Viés	0,6630	-0,1156	-0,0672	9,81E-04	2,83E-05	Viés	0,5803	-0,1049	-0,0133	1,26E-03	5,47E-05

Tabela 47 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				Kmenta						LM	
				Primal						Mult	
Média	3,4243	0,8659	0,2019	7,99E-01	1,20E-03	Média	3,6234	0,8421	0,2250	7,98E-01	1,19E-03
Variância	0,1489	0,0030	7,7956	7,08E-06	5,38E-09	Variância	1,1503	0,0134	2,0262	6,39E-05	3,78E-08
Viés	0,4243	-0,0341	0,1019	-6,39E-04	2,03E-04	Viés	0,6234	-0,0579	0,1250	-1,82E-03	1,92E-04
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						Kmenta	
				Primal						Dual	
				Aditivo						Dual	
Média	3,0052	0,8993	0,0993	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,3172	0,7922	2,2961	8,00E-01	4,38E-03
Variância	0,0021	0,0000	0,0001	1,04E-07	6,76E-11	Variância	0,1508	0,0386	1595,8162	2,47E-07	1,51E-10
Viés	0,0052	-0,0007	-0,0007	1,57E-06	9,81E-07	Viés	0,3172	-0,1078	2,1961	1,22E-06	3,38E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Mult	
				Aditivo						Mult	
Média	3,0000	0,9000	0,1001	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,1033	0,8786	0,0838	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0004	0,0000	0,0001	3,73E-09	2,96E-12	Variância	0,1760	0,0059	0,0264	1,82E-06	5,52E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0001	2,38E-07	2,18E-08	Viés	0,1033	-0,0214	-0,0162	1,49E-06	9,37E-07
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual II						Dual II	
				Aditivo						Mult	
Média	3,0003	0,8999	0,0999	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0030	0,8993	0,1014	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0000	1,96E-09	1,09E-12	Variância	0,0152	0,0003	0,0012	1,65E-06	2,31E-10
Viés	0,0003	-0,0001	-0,0001	2,54E-07	2,74E-08	Viés	0,0030	-0,0007	0,0014	9,79E-06	-4,31E-07
Verdadeiro	3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				Kmenta						LM	
				Primal						Primal	
				Aditivo						Mult	
Média	3,4116	0,8698	0,1331	9,00E-01	1,43E-03	Média	4,1230	0,8324	0,1054	8,99E-01	1,51E-03
Variância	0,0551	0,0005	0,0018	1,94E-06	2,29E-08	Variância	4,7460	0,0144	0,0244	2,31E-04	5,14E-07
Viés	0,4116	-0,0302	0,0331	2,58E-05	4,28E-04	Viés	1,1230	-0,0676	0,0054	-8,62E-04	5,14E-04
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						Kmenta	
				Primal						Dual	
				Aditivo						Dual	
Média	3,0000	0,9000	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1779	0,8692	0,7318	9,00E-01	8,45E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	4,10E-12	2,42E-14	Variância	0,0660	0,0082	212,9414	1,50E-08	1,55E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	3,44E-09	-4,71E-11	Viés	0,1779	-0,0308	0,6318	-4,00E-06	7,45E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Dual Y	
				Aditivo						Mult	
Média	2,9990	0,9000	0,0997	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,1329	0,8777	0,0682	9,00E-01	9,98E-04
Variância	0,0021	0,0000	0,0001	5,57E-07	5,46E-12	Variância	0,2323	0,0054	0,0172	1,66E-06	2,70E-09
Viés	-0,0010	0,0000	-0,0003	1,63E-05	-3,94E-08	Viés	0,1329	-0,0223	-0,0318	2,25E-05	-2,00E-06
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual II						Dual II	
				Aditivo						Mult	
Média	3,0014	0,9002	0,1000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9592	0,9032	0,1232	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0074	0,0007	0,0000	6,68E-04	8,37E-10	Variância	0,0545	0,0007	0,0117	3,22E-06	2,51E-09
Viés	0,0014	0,0002	0,0000	8,38E-05	-1,55E-07	Viés	-0,0408	0,0032	0,0232	4,69E-05	7,65E-06

Tabela 48 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				Primal						Primal	
				Kmenta						Kmenta	
Média	2,7866	1,0119	-18,7332	7,99E-01	1,05E-03	Média	3,0816	0,8914	0,4956	7,99E-01	9,99E-04
Variância	0,0485	0,0021	995593,1125	6,86E-06	8,57E-09	Variância	0,1344	0,0019	0,0090	4,85E-05	3,51E-08
Viés	-0,2134	0,1119	-19,2332	-1,08E-03	5,50E-05	Viés	0,0816	-0,0086	-0,0044	-1,34E-03	-1,19E-06
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				Primal						Primal	
				Aditivo						Aditivo	
Média	3,0028	0,8997	0,4994	8,00E-01		Média	3,7294	0,7660	4,5050	8,00E-01	3,21E-03
Variância	0,0010	0,0000	0,0001	2,06E-07		Variância	5,0067	0,0267	19915,6491	2,38E-07	1,59E-10
Viés	0,0028	-0,0003	-0,0006	-5,63E-06		Viés	0,7294	-0,1340	4,0050	1,47E-05	2,21E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Dual Y	
Média	3,0000	0,9000	0,5000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0072	0,8983	0,4979	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0001	0,0000	0,0000	7,63E-09	8,40E-12	Variância	0,0104	0,0003	0,0032	1,49E-06	6,99E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-2,75E-08	7,74E-09	Viés	0,0072	-0,0017	-0,0021	-8,53E-06	4,75E-07
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual II						Dual II	
Média	3,0006	0,9000	0,5002	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0009	0,8996	0,5010	8,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0075	0,0007	0,0002	5,32E-04	8,30E-10	Variância	0,0080	0,0002	0,0016	4,18E-06	1,81E-10
Viés	0,0006	0,0000	0,0002	3,42E-04	5,53E-08	Viés	0,0009	-0,0004	0,0010	-1,68E-05	1,69E-07
Verdadeiro	3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	0,5	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				Primal						Primal	
				Kmenta						Kmenta	
Média	2,6440	1,0226	2,1856	9,00E-01	7,66E-04	Média	2,9936	0,9035	0,4946	9,00E-01	7,12E-04
Variância	0,0239	0,0006	297636,1347	1,88E-06	3,64E-08	Variância	0,2117	0,0011	0,0075	1,55E-04	3,95E-07
Viés	-0,3560	0,1226	1,6856	-4,30E-05	-2,34E-04	Viés	-0,0064	0,0035	-0,0054	-3,61E-04	-2,88E-04
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Aditivo						Aditivo	
Média	3,0000	0,9000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,8113	0,7793	0,3470	9,00E-01	4,65E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	2,49E-11	1,53E-13	Variância	0,0625	0,0026	65,0293	1,51E-08	1,55E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	1,16E-07	4,16E-09	Viés	0,8113	-0,1207	-0,1530	-9,30E-06	3,65E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual Y						Dual Y	
Média	3,0000	0,9000	0,5000	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0026	0,8994	0,4985	9,00E-01	1,00E-03
Variância	0,0000	0,0000	0,0000	2,33E-13	1,81E-15	Variância	0,0053	0,0001	0,0005	1,09E-06	3,03E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	1,05E-08	-6,81E-10	Viés	0,0026	-0,0006	-0,0015	1,58E-05	2,47E-06
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
				LM						LM	
				Dual II						Dual II	
Média	2,9998	0,9000	0,4996	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9722	0,9018	0,5519	9,00E-01	1,01E-03
Variância	0,0075	0,0007	0,0002	6,83E-04	8,34E-10	Variância	0,1288	0,0021	0,0430	2,09E-06	4,19E-09
Viés	-0,0002	0,0000	-0,0004	-1,77E-04	-3,25E-07	Viés	-0,0278	0,0018	0,0519	5,30E-05	8,22E-06

Tabela 49 – Resultados numéricos - continuação

	A	α	ρ	γ	θ		A	α	ρ	γ	θ
Verdadeiro	3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	8,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Kmenta			LM			Kmenta	
Média	2,9825	0,9420	7,4953	8,01E-01	6,38E-04	Média	2,9847	0,8827	0,8280	8,01E-01	6,46E-04
Variancia	0,0358	0,0020	83812,8220	7,03E-06	1,35E-08	Variancia	0,0577	0,0013	0,0207	4,24E-05	5,48E-08
Viés	-0,0175	0,0420	6,4953	6,33E-04	-3,62E-04	Viés	-0,0153	-0,0173	-0,1720	1,43E-03	-3,54E-04
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Primal			LM			Primal	
Média	3,0020	0,8997	0,9990	8,00E-01	9,99E-04	Média	4,1022	0,7186	3,7022	8,00E-01	2,06E-03
Variancia	0,0008	0,0000	0,0004	2,96E-07	4,64E-10	Variancia	24,9614	0,0296	2971,8736	2,38E-07	1,60E-10
Viés	0,0020	-0,0003	-0,0010	5,87E-07	-6,17E-07	Viés	1,1022	-0,1814	2,7022	8,81E-05	1,06E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Dual Y			LM			Dual Y	
Média	3,0000	0,9000	1,0000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0061	0,8983	0,9974	8,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0001	0,0000	0,0001	1,13E-08	4,31E-11	Variancia	0,0079	0,0003	0,0063	1,22E-06	2,47E-09
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	-4,16E-07	1,20E-07	Viés	0,0061	-0,0017	-0,0026	2,50E-05	6,30E-07
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Dual II			LM			Dual II	
Média	2,9991	0,8994	1,0000	8,00E-01	1,00E-03	Média	3,0020	0,8991	1,0003	8,00E-01	1,00E-03
Variancia	0,0075	0,0007	0,0008	5,29E-04	8,30E-10	Variancia	0,0073	0,0002	0,0037	4,64E-06	2,34E-10
Viés	-0,0009	-0,0006	0,0000	2,75E-05	1,92E-07	Viés	0,0020	-0,0009	0,0003	1,73E-05	1,98E-07
Verdadeiro	3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03		3	0,9	1	9,00E-01	1,00E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Kmenta			LM			Kmenta	
Média	4,1465	0,7017	0,4488	9,02E-01	-3,61E-04	Média	3,3642	0,8367	0,8483	8,99E-01	5,25E-04
Variancia	0,0495	0,0008	0,0011	1,93E-06	6,07E-08	Variancia	0,6085	0,0096	0,1587	1,27E-04	2,74E-07
Viés	1,1465	-0,1983	-0,5512	2,07E-03	-1,36E-03	Viés	0,3642	-0,0633	-0,1517	-8,20E-04	-4,75E-04
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Primal			LM			Primal	
Média	3,0000	0,9000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	4,2768	0,7879	6,1283	9,00E-01	2,16E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	1,64E-11	2,97E-14	Variancia	107,2940	0,0294	18752,8245	1,49E-08	1,53E-10
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	3,83E-08	-9,47E-10	Viés	1,2768	-0,1121	5,1283	1,13E-04	1,16E-03
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Dual Y			LM			Dual Y	
Média	3,0000	0,9000	1,0000	9,00E-01	1,00E-03	Média	2,9863	0,9023	1,0181	9,00E-01	1,05E-03
Variancia	0,0000	0,0000	0,0000	1,59E-13	1,19E-14	Variancia	0,0075	0,0002	0,0044	7,12E-07	3,22E-08
Viés	0,0000	0,0000	0,0000	5,27E-09	1,61E-10	Viés	-0,0137	0,0023	0,0181	6,59E-05	4,70E-05
	N = 500			Modelo			N = 500			Modelo	
	LM			Dual II			LM			Dual II	
Média	3,0009	0,9000	1,0002	9,00E-01	1,00E-03	Média	3,0156	0,8955	1,0459	9,00E-01	9,95E-04
Variancia	0,0076	0,0007	0,0008	6,74E-04	8,33E-10	Variancia	0,0786	0,0027	0,0999	2,02E-06	1,93E-09
Viés	0,0009	0,0000	0,0002	2,07E-04	3,16E-07	Viés	0,0156	-0,0045	0,0459	1,42E-06	-4,75E-06